Produktintegration

Diese erste Seite dient als Wiederholung und Information. Lies sie aufmerksam durch und nutze Farbe für die Kennzeichnung aus deiner Sicht wichtiger Stellen!

Bislang haben wir uns beim Aufleiten bzw. dem Finden von Stammfunktionen wie bei den Regeln zum Ableiten mit der Potenz-, Faktor- und Summenregel beschäftigt und viele Übungen dazu gerechnet. Alle drei Regeln finden (ausführlich geschrieben ihre Anwendung, wenn man eine Stammfunktion für ein Polynom finden will.

Ausführliches Beispiel:

$$\int 2x^3 + 5x - 3\,dx = \int 2x^3\,dx + \int 5x\,dx - \int 3\,dx$$

Hier wurde die Summenregel benutzt, was erlaubt ist, weil Integration Summation ist und deswegen das Distributivgesetz gilt (das gilt auch für Subtraktion, da man Subtraktion auch als Addition negativer Werte umschreiben kann).

$$\int 2x^3\,dx + \int 5x\,dx - \int 3x^0\,dx = 2\int x^3\,dx + 5\int x\,dx - 3\int x^0\,dx$$

Hier wurde wiederum aufgrund des Distributivgesetzes die Faktorregel benutzt und zusätzlich 3 zu $3x^0$ umgeschrieben, damit im nächsten Schritt die Potenzregel benutzt werden kann.

$$2\int x^3\,dx + 5\int x\,dx - 3\int x^0\,dx = 2\frac{1}{4}x^4 + 5\frac{1}{2}x^2 - 3\frac{1}{1}x^1 = \frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - 3x$$

Hier wurde für die verbleibenden Integrale die (mühsam hergeleitete) Potenzregel benutzt und das Ergebnis (die gesuchte Stammfunktion) vereinfacht.
Da bei der Probe (Ableiten der Stammfunktion) reelle Zahlen der Form c (kurz: Konstanten) „wegfallen, ergibt sich als Ergebnis:

$$\int 2x^3 + 5x - 3\,dx = \frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - 3x + c\,,\quad c \in \mathbb{R}$$

Die **Produktintegration** (auch **partielle Integration** genannt) erweitert diese bisher behandelten Regeln zum Finden einer Stammfunktion auf Funktionen, die man als Produkte von zwei Funktionen interpretieren kann. Beispiele für solche Integrale sind :

$$\int x \cdot e^x dx$$

$$\int 3x \cdot \sin(x) dx$$

$$\int x^2 \cdot e^x dx$$

$$\int \sin(x)^2\,dx$$

Natürlich ist die Interpretation der zu integrierenden Funktionen willkürlich, da man 3xsin(x) oder x^2e^x jeweils auch als ein Produkt von drei Funktionen interpretieren kann (also etwa als $3 \cdot x \cdot \sin(x)$ oder $x \cdot x \cdot e^x$).
Da man für 3x oder x^2 aber schon Regeln zum Finden einer Stammfunktion kennt, kann man diese als einen Faktor interpretieren.
Manchmal (sogar glücklicherweise sehr selten) kann es sogar hilfreich sein, dass man Funktionen als ein Produkt schreibt, indem man sie mit 1 multipliziert:

$$\int \ln(x)\,dx = \int \ln(x) \cdot 1\,dx$$

Warum das nützlich ist, die Produktregel hergeleitet wird und wie man sie anwendet, wird auf der folgenden Seite erklärt.

Herleitung der Produktregel

In der Differentialrechnung wurde hergeleitet, wie man eine Funktion f=u·v ableitet, die man als ein Produkt von zwei Funktionen u und v interpretieren kann. Es gilt:

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$$

Für die Herleitung der Produktregel der Integralrechnung integrieren wir nun beide Seiten dieser Gleichung (weil bereits in der ersten Zeile u(x) als u und v(x) als v geschrieben wurde, kann man das auch im Folgenden einschließlich dx zur besseren Übersicht vernachlässigen):

$$\int (u\cdot v)' = \int (u'\cdot v + u\cdot v')$$

Da sich Differenzieren und Integrieren gegenseitig umkehren gilt

$$u\cdot v = \int (u'\cdot v + u\cdot v')$$

Wegen der Summenregel ergibt sich nun schon die **Produktregel**:

$$u\cdot v = \int u'\cdot v + \int u\cdot v'$$

Damit die Produktregel praktisch nutzbar ist, wird sie noch umgestellt zu

$u\cdot v - \int u'\cdot v = \int u\cdot v'$ beziehungsweise

$$\boxed{\int u\cdot v' = u\cdot v - \int u'\cdot v}$$

Beispiele zur Produktintegration:

$$\begin{aligned}
&f(x) = x\cdot e^x\\
&u(x) = x,\ \ v'(x) = e^x\\
&u'(x) = 1,\ \ v(x) = e^x\\
&\int u\cdot v' &&= u\cdot v - \int u'\cdot v\\
&\int x\cdot e^x\,dx &&= x\cdot e^x - \int 1\cdot e^x\,dx\\
& &&= x\cdot e^x - \int e^x\,dx\\
& &&= x\cdot e^x - e^x \quad + c\ ,\ \ c\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&f(x) = (3x+1)\cdot e^x\\
&u(x) = 3x+1,\ v'(x) = e^x\\
&u'(x) = 3,\quad v(x) = e^x\\
&\int u\cdot v' &&= u\cdot v \quad - \int u'\cdot v\\
&\int (3x+1)\cdot e^x\,dx &&= (3x+1)\cdot e^x - \int 3\cdot e^x\,dx\\
& &&= (3x+1)\cdot e^x - 3e^x + c\ ,\ \ c\in\mathbb{R}\\
& &&= 3xe^x - 2e^x \quad + c\ ,\ \ c\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Eine Stammfunktion zu xe^x ist also xe^x-e^x+c.
Eine Stammfunktion zu $(3x+1)e^x$ ist demnach $3xe^x-2e^x+c$.

Aufgabe 1: Berechne analog zu den beiden Beispielen Stammfunktionen und notiere einen Antwortsatz (Tipp: wenn v'(x)=sin(x) gemäß der Produktregel sein muss, dann muss v(x) eine Stammfunktion von sin(x) sein):

$$\int x\cdot\sin(x)dx,\ \int (5x+2)\cdot\sin(x)dx\ ,\ \int x\cdot\cos(x)dx \text{ und } \int (6x-3)\cdot\cos(x)dx$$

Aufgabe 2: Berechne

$$\int_{-1}^{1} x\cdot e^x dx\ ,\ \int_0^{\pi} x\cdot\sin(x)dx \text{ und } \int_0^{2\pi} x\cdot\cos(x)dx$$

Aufgabe 3: Berechne den Flächeninhalt, den der Graph der Funktion $f(x)=x\cdot e^x$ mit der x-Achse im Intervall [-1,1] einschließt. Erkläre, warum sich hierbei ein anderer Wert als das Ergebnis von $\int_{-1}^{1} x\cdot e^x dx$ ergeben muss.

Lösungen zu Aufgabe 1:

$$f(x)=x\cdot\sin(x)$$
$$u(x)=x,\ \ v'(x)=\sin(x)$$
$$u'(x)=1,\ \ v(x)=-\cos(x)$$
$$\begin{aligned}\int u\cdot v' &= u\cdot v-\int u'\cdot v\\ \int x\cdot\sin(x)\,dx &= x\cdot(-\cos(x))-\int 1\cdot(-\cos(x))\,dx\\ &= -x\cdot\cos(x)+\int\cos(x)\,dx\\ &= -x\cdot\cos(x)+\sin(x)\qquad +c\ ,\ \ c\in\mathbb{R}\\ &= -x\cdot\cos(x)+\sin(x)\qquad +c\ ,\ \ c\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

$$f(x)=(5x+2)\cdot\sin(x)$$
$$u(x)=5x+2,\ \ v'(x)=\sin(x)$$
$$u'(x)=5,\ \ v(x)=-\cos(x)$$
$$\begin{aligned}\int u\cdot v' &= u\cdot v-\int u'\cdot v\\ \int (5x+2)\cdot\sin(x)\,dx &= (5x+2)\cdot(-\cos(x))-\int 5\cdot(-\cos(x))\,dx\\ &= -(5x+2)\cdot\cos(x)+5\int\cos(x)\,dx\\ &= -(5x+2)\cdot\cos(x)+5\sin(x)\qquad +c\ ,\ \ c\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

$$f(x)=x\cdot\cos(x)$$
$$u(x)=x,\ \ v'(x)=\cos(x)$$
$$u'(x)=1,\ \ v(x)=\sin(x)$$
$$\begin{aligned}\int u\cdot v' &= u\cdot v-\int u'\cdot v\\ \int x\cdot\cos(x)\,dx &= x\cdot\sin(x)-\int 1\cdot\sin(x)\,dx\\ &= x\cdot\sin(x)-\int\sin(x)\,dx\\ &= x\cdot\sin(x)-(-\cos(x))\quad +c\ ,\ \ c\in\mathbb{R}\\ &= x\cdot\sin(x)+\cos(x)\qquad +c\ ,\ \ c\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

$$f(x)=(6x-3)\cdot\cos(x)$$
$$u(x)=6x-3,\ \ v'(x)=\cos(x)$$
$$u'(x)=6,\ \ v(x)=\sin(x)$$
$$\begin{aligned}\int u\cdot v' &= u\cdot v-\int u'\cdot v\\ \int (6x-3)\cdot\cos(x)\,dx &= (6x-3)\cdot\sin(x)-\int 6\cdot\sin(x)\,dx\\ &= (6x-3)\cdot\sin(x)-6\int\sin(x)\,dx\\ &= (6x-3)\cdot\sin(x)-6(-\cos(x))\quad +c\ ,\ \ c\in\mathbb{R}\\ &= (6x-3)\cdot\sin(x)+6\cos(x)\qquad +c\ ,\ \ c\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

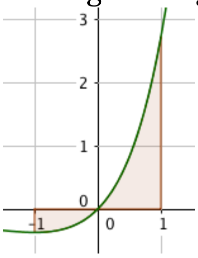
Lösungen zu Aufgabe 2:

$$\int_{-1}^{1} x\cdot e^{x}\,dx = \left[x\cdot e^{x} - e^{x}\right]_{-1}^{1} = (1\cdot e^{1} - e^{1} + c) - (-1e^{-1} - e^{-1} + c) = e - e + c - \left(-\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + c\right) = \frac{2}{e}$$

Bemerkung 1: Die eckigen Klammern mit den rechts unten und oben angehängten Integrationsgrenzen können genutzt werden, um die gesuchte Stammfunktion übersichtlich zu notieren.
Bemerkung 2: Die Integrationskonstante c wird in den folgenden Rechnungen nicht mehr notiert, da sie durch die Subtraktion der Stammfunktionen in jedem Fall entfällt.
Bemerkung 3: Für die Berechnung des Integrals sollte man vorab beachten, dass der Term xe^x auf dem Intervall [-1,1] überall definiert ist.

$\int_{0}^{\pi} x\cdot\sin(x)\,dx = \left[-x\cdot\cos(x)+\sin(x)\right]_{0}^{\pi}$	$\int_{0}^{2\pi} x\cdot\cos(x)\,dx = \left[x\cdot\sin(x)+\cos(x)\right]_{0}^{2\pi}$
$= -\pi\cos(\pi)+\sin(\pi)-(-0\cos(0)+\sin(0))$	$= 2\pi\sin(2\pi)+\cos(2\pi)-(0\sin(0)+\cos(0))$
$= -\pi(-1)+0-(0)$	$= 2\pi\cdot 0+1-(0+1)$
$= \pi$	$= 0$

Lösung zu Aufgabe 3:



Das Schaubild der Funktion zeigt, dass beim Integral über dem Intervall [-1,1] negative Flächeninhalte mit positiven Flächeninhalten „verrechnet“ werden.
Insofern muss für den in dieser Aufgabe zu berechnenden Flächeninhalt A zusätzlich beachtet werden, dass der Flächeninhalt unterhalb der x-Achse und der Flächeninhalt oberhalb der x-Achse getrennt voneinander berechnet werden muss und deren Beträge zu addieren sind:

$$A = \left|\int_{-1}^{0} x\cdot e^{x}\,dx\right| + \left|\int_{0}^{1} x\cdot e^{x}\,dx\right|$$

$$= \left|\left[x\cdot e^{x} - e^{x}\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[x\cdot e^{x} - e^{x}\right]_{0}^{1}\right|$$

$$= \left|(0\cdot e^{0} - e^{0}) - (-1e^{-1} - e^{-1})\right| + \left|(1\cdot e^{1} - e^{1}) - (0e^{0} - e^{0})\right|$$

$$= \left|(-1) - \left(-\frac{1}{e} - \frac{1}{e}\right)\right| + \left|(0) - (-1)\right|$$

$$= \left|-1 + \frac{2}{e}\right| + 1$$

$$= \left|-\frac{e}{e} + \frac{2}{e}\right| + 1 = \left|\frac{-e+2}{e}\right| + 1 = \frac{e-2}{e} + 1 = \frac{e}{e} - \frac{2}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e} + 1 = 2 - \frac{2}{e} \approx 1{,}26$$

Bemerkung 1: Der Wegfall der Betragsstriche in der letzten Zeile liegt daran, dass nur der Zähler des Bruchs (-e+2)/e negativ ist (-2,71...+2=-0,71...<0). Der Betrag des Zählers (+0,71) ist jedoch genau so groß, wie der Wert der Zahl e-2. Daher entfallen die Betragsstriche bei dieser Umformung.
Bemerkung 2: Die Beträge müssen nicht miteinander verrechnet werden, wie hier gezeigt. Die Beträge hätten auch einzeln berechnet werden können.
Bemerkung 3: Die Werte können auch mit dem Taschenrechner berechnet werden, dann kann man allerdings keine Aussagen über Rundungsfehler mehr treffen, sondern muss dem angegebenen Wert vertrauen.

Mehr zur Produktintegration

Um mit Hilfe der Produktintegration Stammfunktionen zu finden, gibt es ergänzend zu den zuvor behandelten Rechenbeispielen drei typische Strategien:

1. Wiederholte Anwendung der Produktintegration

Das folgende Beispiel zeigt, dass die einmalige Anwendung der Produktintegration nicht sofort auf die gesuchte Stammfunktion führt:

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2xe^x \, dx = x^2 e^x - 2\int xe^x \, dx$$

Durch erneute Anwendung der Produktintegration muss eine Stammfunktion zu xe^x gefunden werden. Durch das Beispiel von Seite 2 ist bekannt, dass dies $xe^x - e^x + c$ ist. Also gilt

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2\int xe^x \, dx = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + c = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c \ , \ \ c \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 4: Berechne $\int x^3 e^x \, dx$, $\int x^4 e^x \, dx$, $\int x^2 \sin(x) dx$ und $\int x^2 \cos(x) dx$

2. Addieren und Halbieren

Das folgende Beispiel zeigt, dass die einmalige Anwendung der Produktintegration, Umformen und Umstellen der Gleichung auf die gesuchte Stammfunktion führt:

$$\begin{aligned}\int (\sin(x))^2 \, dx &= \int \sin(x) \cdot \sin(x) \, dx \\ &= \sin(x) \cdot (-\cos(x)) - \int \cos(x) \cdot (-\cos(x)) \, dx \\ &= -\sin(x) \cdot \cos(x) + \int (\cos(x))^2 \, dx \\ &= -\sin(x) \cdot \cos(x) + \int 1 - (\sin(x))^2 \, dx \\ &= -\sin(x) \cdot \cos(x) + \int 1 \, dx - \int (\sin(x))^2 \, dx\end{aligned}$$

Bemerkung: Um in Zeile 3 im Integral $(\cos(x))^2$ auf einen Term mit $(\sin(x))^2$ zurückführen zu können, wurde der Satz des Pythagoras im Einheitskreis für trigonometrische Funktionen benutzt, der als $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$ geschrieben werden kann.
Schreibt man den ersten und letzten Term der obigen Umformung erneut als Gleichung auf und addiert $\int (\sin(x))^2 dx$ auf beiden Seiten der Gleichung ergibt sich

$$\begin{aligned}& \int (\sin(x))^2 \, dx = -\sin(x) \cdot \cos(x) + \int 1 \, dx - \int (\sin(x))^2 \, dx \\ \Leftrightarrow\ & 2\int (\sin(x))^2 \, dx = -\sin(x) \cdot \cos(x) + \int 1 \, dx \\ \Leftrightarrow\ & 2\int (\sin(x))^2 \, dx = -\sin(x) \cdot \cos(x) + x \\ \Leftrightarrow\ & \int (\sin(x))^2 \, dx = \frac{1}{2}\big(-\sin(x) \cdot \cos(x) + x\big) + c \ , \ \ c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Aufgabe 5: Berechne $\int (\cos(x))^2 dx$ und $\int e^x \cos(x) dx$

3. Multiplikation mit 1

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Multiplikation mit 1 die Anwendung der Produktintegration ermöglicht und auf die gesuchte Stammfunktion führt:

$$\int \ln(x) dx = \int \ln(x) \cdot 1 \, dx = \ln(x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx = \ln(x) \cdot x - \int 1 \, dx = \ln(x) \cdot x - x + c \ , \ \ c \in \mathbb{R}$$

Bemerkung: Ich kenne kein weiteres Beispiel für diese Strategie. Wer eins findet, wird mit viel Lob und Anerkennung belohnt!
Aufgabe 6: Begründe durch Ableiten der Stammfunktion, dass sie zu ln(x) passt.

Lösungen zu Aufgabe 4:

$$\begin{aligned}\int x^3e^x\,dx &= x^3e^x-\int 3x^2e^x\,dx\\ &= x^3e^x-3\int x^2e^x\,dx\\ &= x^3e^x-3\left(x^2e^x-2xe^x+2e^x\right)+c\,,\quad c\in\mathbb{R}\\ &= x^3e^x-3x^2e^x+6xe^x-6e^x+c\,,\quad c\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int x^4e^x\,dx &= x^4e^x-\int 4x^3e^x\,dx\\ &= x^4e^x-4\int x^3e^x\,dx\\ &= x^4e^x-4\left(x^3e^x-3x^2e^x+6xe^x-6e^x\right)+c\,,\quad c\in\mathbb{R}\\ &= x^4e^x-4x^3e^x+12x^2e^x-24xe^x+24e^x+c\,,\quad c\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int x^2\sin(x)\,dx &= x^2(-\cos(x))-\int 2x(-\cos(x))\,dx\\ &= -x^2\cos(x)+2\int x\cos(x)\,dx\\ &= -x^2\cos(x)+2(x\sin(x)+\cos(x))+c\,,\quad c\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int x^2\cos(x)\,dx &= x^2\sin(x)-\int 2x\sin(x)\,dx\\ &= x^2\sin(x)-2\int x\sin(x)\,dx\\ &= x^2\sin(x)-2(\sin(x)-x\cos(x))+c\,,\quad c\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Lösungen zu Aufgabe 5:

$$\begin{aligned}\int(\cos(x))^2\,dx &= \int\cos(x)\cdot\cos(x)\,dx\\ &= \cos(x)\cdot\sin(x)-\int(-\sin(x))\cdot\sin(x)\,dx\\ &= \cos(x)\cdot\sin(x)+\int(\sin(x))^2\,dx\\ &= \cos(x)\cdot\sin(x)+\int 1-(\cos(x))^2\,dx\\ &= \cos(x)\cdot\sin(x)+\int 1\,dx-\int(\cos(x))^2\,dx\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int(\cos(x))^2\,dx=\cos(x)\cdot\sin(x)+\int 1\,dx-\int(\cos(x))^2\,dx$$

$$\Leftrightarrow 2\int(\cos(x))^2\,dx=\cos(x)\cdot\sin(x)+\int 1\,dx$$

$$\Leftrightarrow 2\int(\cos(x))^2\,dx=\cos(x)\cdot\sin(x)+x$$

$$\Leftrightarrow \int(\cos(x))^2\,dx=\frac{1}{2}\left(\cos(x)\cdot\sin(x)+x\right)+c\,,\quad c\in\mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}\int e^x\cos(x)dx &= e^x\sin(x)-\int e^x\sin(x)\,dx\\ &= e^x\sin(x)-\left(e^x(-\cos(x))-\int e^x(-\cos(x))\,dx\right)\\ &= e^x\sin(x)+e^x\cos(x)-\int e^x\cos(x)\,dx\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2\int e^x\cos(x)dx=e^x\sin(x)+e^x\cos(x)$$

$$\Leftrightarrow \int e^x\cos(x)dx=\frac{1}{2}e^x\left(\sin(x)+\cos(x)\right)+c\,,\quad c\in\mathbb{R}$$

Lösung zu Aufgabe 6:

$$\begin{aligned}\left(\ln(x)x-x\right)' &= \frac{1}{x}x+\ln(x)-1\\ &= 1+\ln(x)-1\\ &= \ln(x)\end{aligned}$$