Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

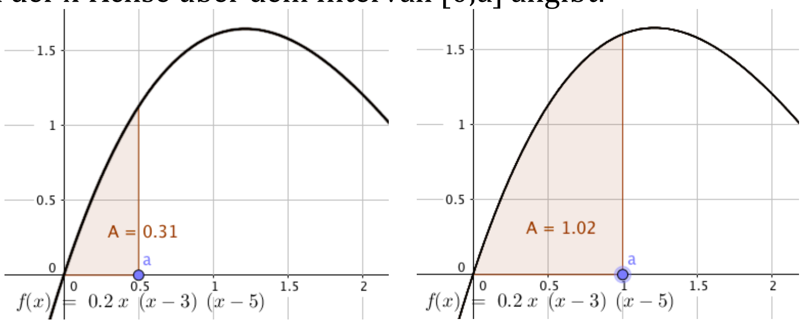
Die Berechnung der vielen Ober- oder Untersummen hat (hoffentlich) zu folgenden Ergebnissen geführt: Der Flächeninhalt F zwischen dem Graphen zur Gleichung

- $f(x) = x^2$ und der x-Achse berechnet sich über dem Intervall [0;a] durch $F(a) = \frac{a^3}{3}$
- $f(x) = x^3$ und der x-Achse berechnet sich über dem Intervall [0;a] durch $F(a) = \frac{a^4}{4}$

Dies legt Vermutungen nahe, dass sich zu $f(x) = x^n$ der Flächeninhalt F über [0;a] durch $F(a) = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ berechnen lässt und F die „Aufleitung“ von f bzw. F’(a) = f(a) ist.

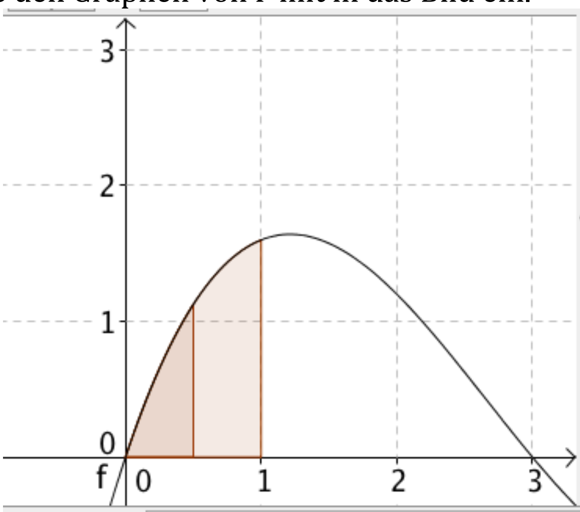
Würde man diese Vermutung jeweils mittels Ober- und Untersummen begründen, wäre dies einerseits sehr mühsam (zumal die Summen für wachsendes n immer komplexer werden) und würde andererseits nur für Potenzfunktionen vom Typ $f(x) = x^n$ gelten (es gibt ja noch andere!).

Deshalb geht man zum Nachweis der Vermutung F’(a) = f(a) anders vor: Hierfür fasst man F als eine Flächeninhaltsfunktion auf, die für jedes a exakt den Flächeninhalt zwischen f und der x-Achse über dem Intervall [0;a] angibt:



Zur abgebildeten Funktion f(x)=0.2x(x-3)(x-5) gilt F(0,5)=0,31 an der Stelle a=0,5 und F(1)=1.02 an der Stelle a=1.

Vervollständige im folgenden Bild die Wertetabelle (schätze möglichst genau) und zeichne den Graphen von F mit in das Bild ein.



	A	B
1	a	F(a)
2	0	
3	0.5	0.31
4	1	1.02
5	1.5	
6	2	
7	2.5	
8	3	
9		

Eingabe: 0.2x(x−3)(x−5)

Ober- und Untersummen waren Summen, die aus dem Produkt von Funktionswerten (Rechteckhöhen) und der Differenz von x-Werten (Rechteckbreiten) gebildet wurden. Man könnte Unter- und Obersummen als allgemein mit der Formel

$$\sum \mathrm{Re}\,chteckhöhe \cdot \mathrm{Re}\,chteckbreite$$

beschreiben. Für den exakten Flächeninhalt benötigt man unendlich viele Rechtecke (die dann aber streng genommen keine Rechtecke mehr sind). Um dennoch ein Symbol für den exakten Flächeninhalt in diesem Zusammenhang nutzen zu können, wird die folgende Symbolschreibweise genutzt:

$$F = \int f(x) \cdot dx \text{ oder kurz } F = \int f(x)dx$$

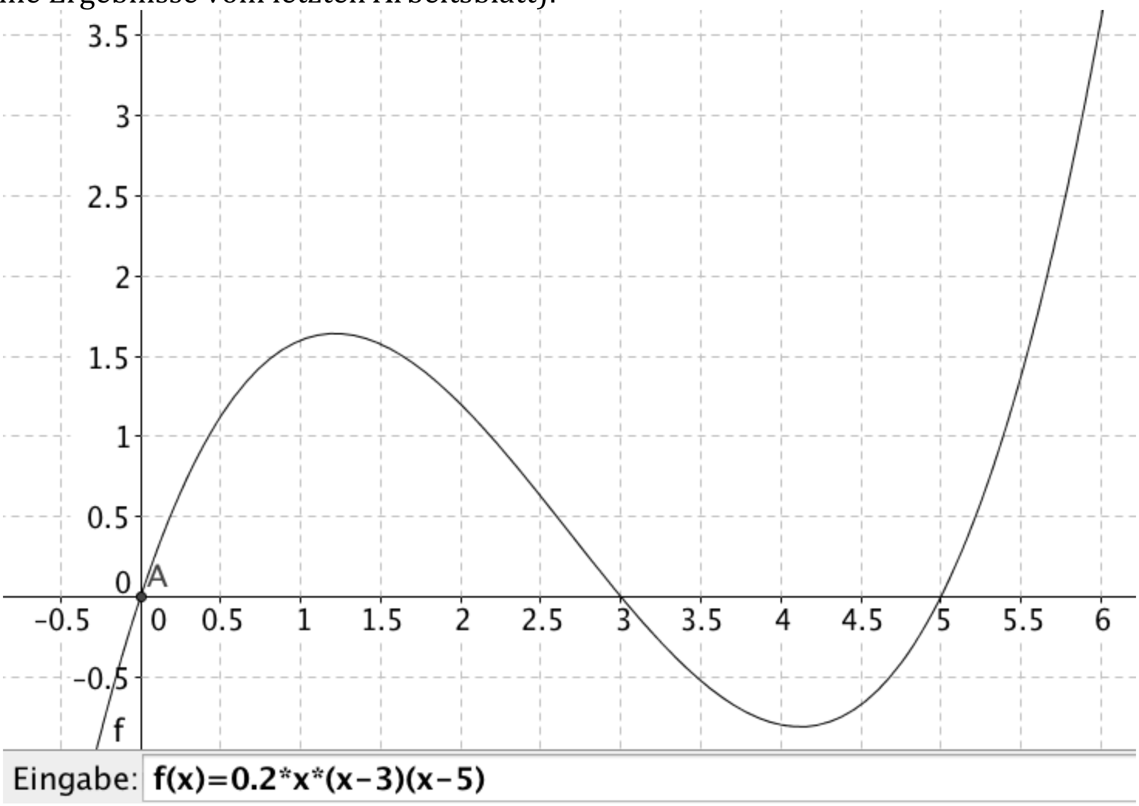
$\int$ symbolisiert hierbei eine unendliche Summe, f(x) die Rechteckhöhe und dx die Rechteckbreite. Um zu verdeutlichen, welches Intervall auf der x-Achse betrachtet wird, schreibt man für die Intervalle [a,b] bzw. [0,a]

$$F = \int_a^b f(x)dx \text{ bzw. } F = \int_0^a f(x)dx$$

Um zu verdeutlichen, dass z.B. für das Intervall [0,a] die obere Intervallgrenze a als variabel und F als eine Flächeninhaltsfunktion betrachtet wird, schreibt man

$$F(a) = \int_0^a f(x)dx$$

1. Zeichne in folgendem Bild den Graphen von $F(a) = \int_0^a f(x)dx$ für $0 \le a \le 6$ ein (nutze deine Ergebnisse vom letzten Arbeitsblatt):



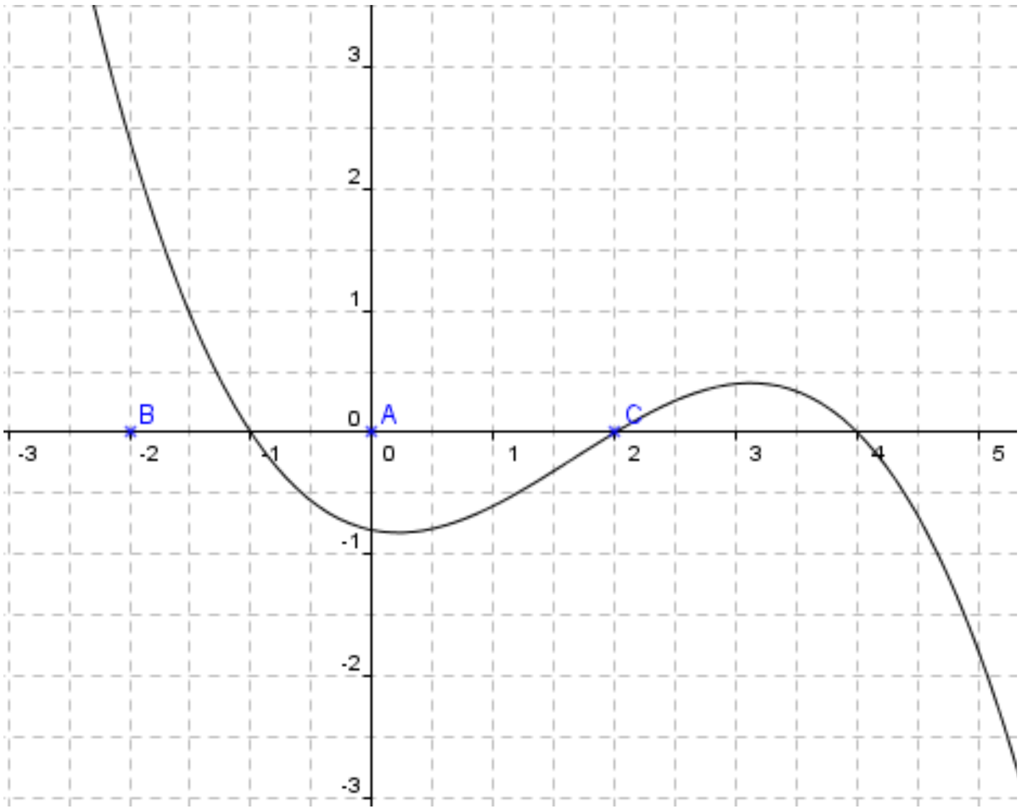
2. Zeichne in das Bild den Graphen von $F(a) = \int_1^a f(x)dx$ für $1 \le a \le 6$ ein.

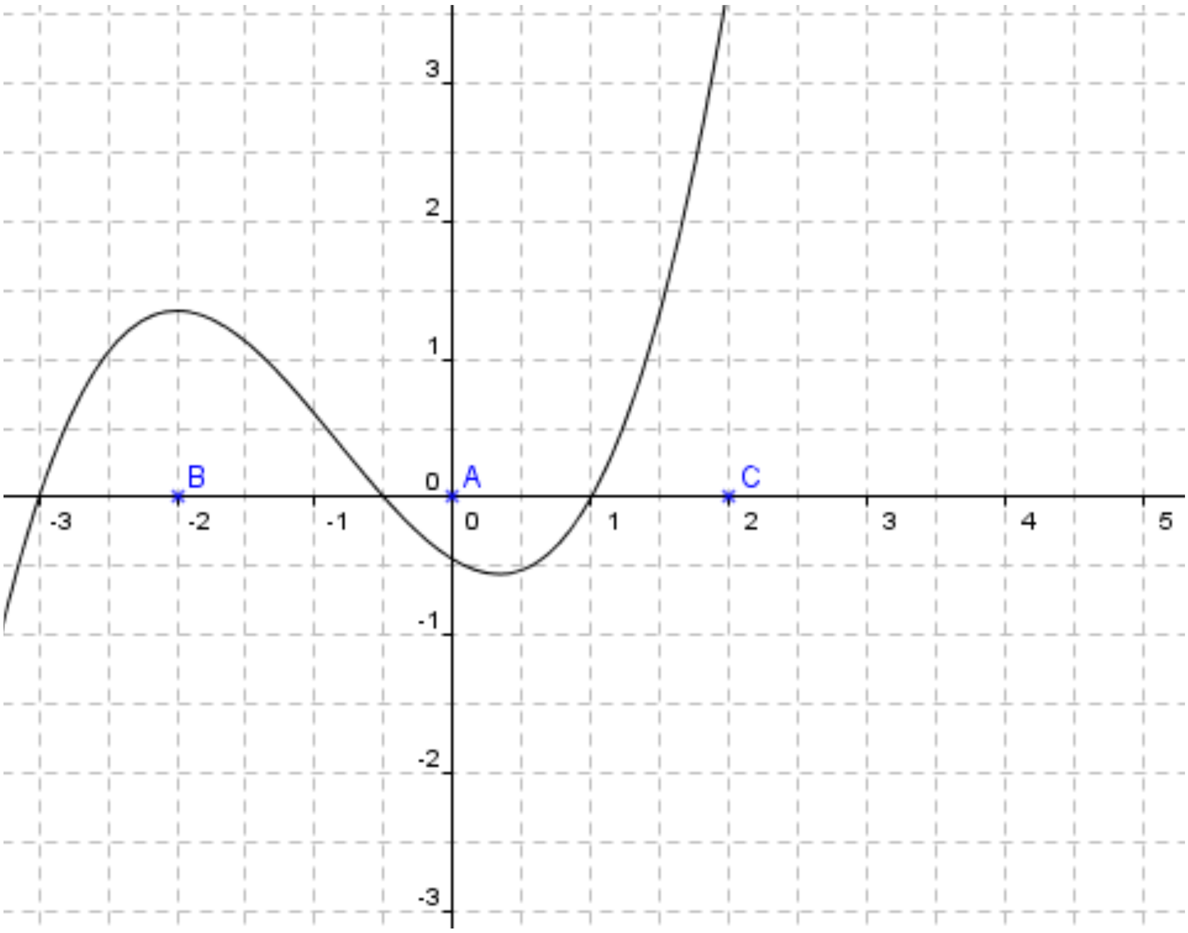
3. Zeichne in das Bild den Graphen von $F(a) = \int_2^a f(x)dx$ für $2 \le a \le 6$ ein.

4. Was fällt auf? Erkläre!

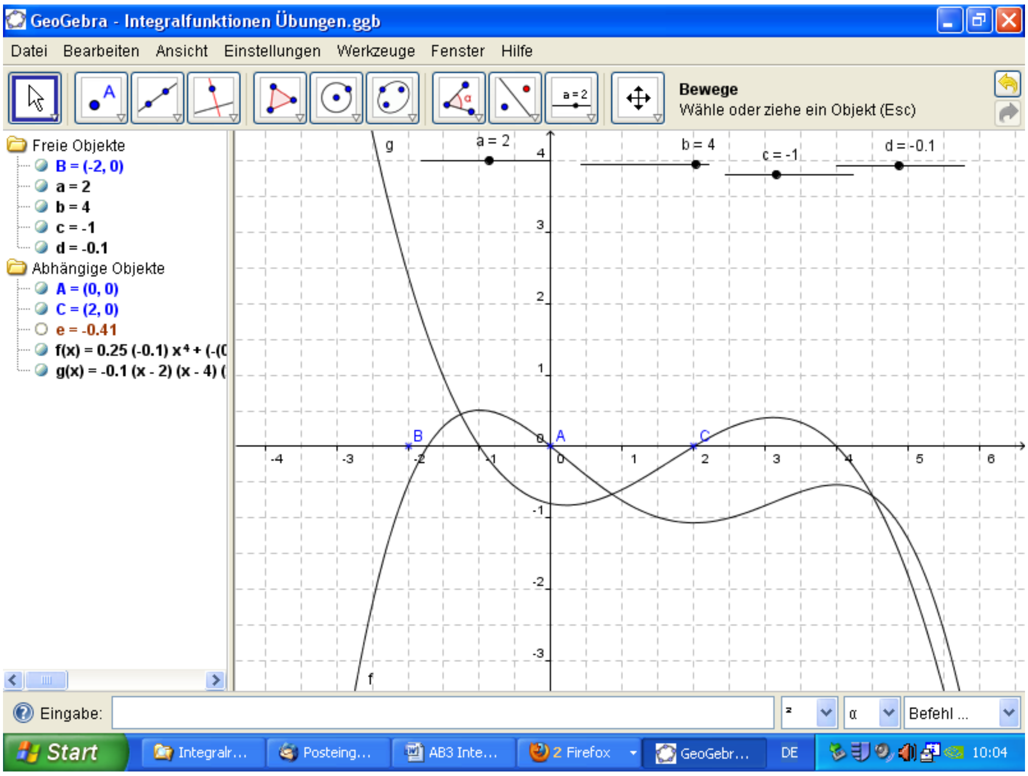
Integralfunktionen zeichnen

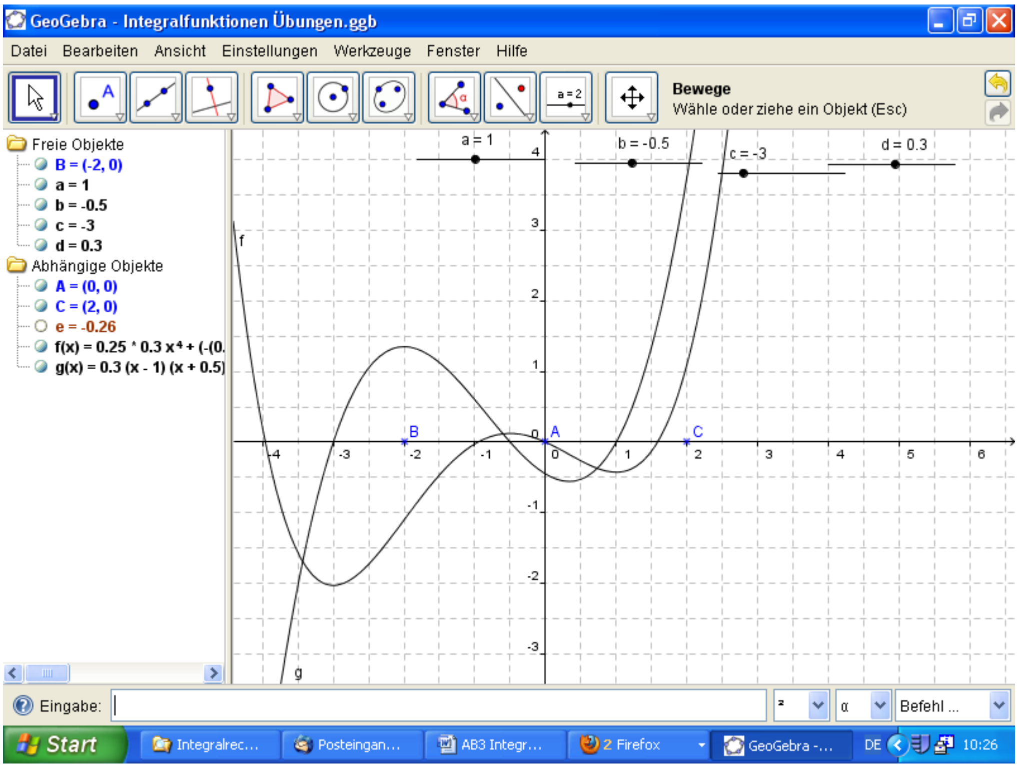
Zeichne die Integralfunktionen jeweils beginnend bei A, B, und C ein





Lösungen (bis auf Parallelverschiebungen):



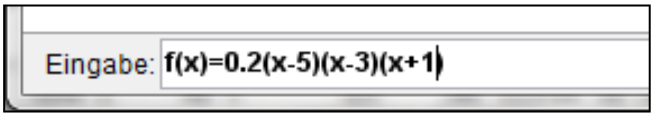


Integralfunktionen mit Geogebra zeichnen

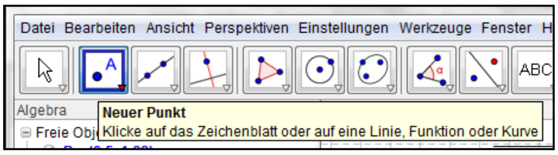
Integralfunktionen für jedes x zu berechnen ist mühselig! Deshalb wird im Folgenden erklärt, wie man Integralfunktionen von Geogebra zeichnen lassen kann.

- Starte zuerst Geogebra

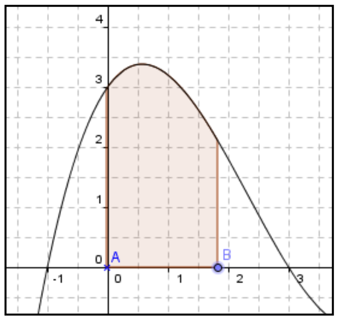
- Gib im Eingabefenster von Geogebra den Term von f(x) ein.



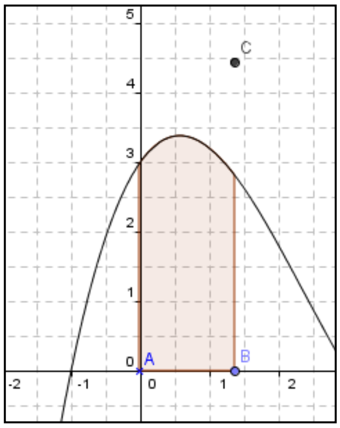
- Wähle im Geogebramenu „Neuer Punkt“ aus und klicke auf die x-Achse, um dort z.B. den Punkt A zu setzen. Da wir für die Integralfunktion eine obere Intervallgrenze brauchen, wiederhole dies (z.B. für einen Punkt B).



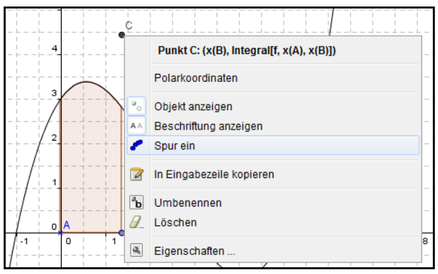
- Um das Integral „sichtbar“ zu machen, gib im Eingabefenster
„Integral[f, x(A), x(B)]“
ein. x(A) ist die x-Koordinate von Punkt A als Intervalluntergrenze
und x(B) die x-Koordinate von Punkt B als Intervallobergrenze.

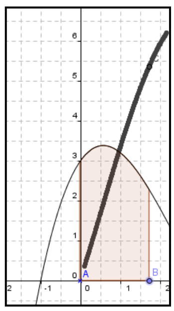


- Um einen Punkt zu zeichnen, dessen x-Koordinate der x-Wert des Punktes B und dessen y-Koordinate der Wert des Integrals zu f über dem Intervall [x(A) ; x(B)] ist, kann man im Eingabefenster
„(x(B), Integral[f, x(A), x(B)])“
eingeben. Die äußeren runden Klammern deutet Geogebra als Koordinatenschreibweise für einen Punkt mit x- und y-Koordinate.



- Klickt man mit der rechten Maustaste auf den Punkt von C und wählt „Spur ein“, so kann man sich durch Bewegen von Punkt B auf der x-Achse die Integralfunktion von Geogebra zeichnen lassen





Zurück zur Vermutung: Ist die Ableitung der Flächeninhalts- bzw. Integralfunktion F an der Stelle a die ursprüngliche Funktion f an der Stelle a? Oder kurz:

Gilt $F'(a) = f(a)$?

Für die Begründung betrachten wir für F(a) das Intervall [0,a]. Es gilt:

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{h}$$

$$= \frac{\int_0^{a+h} f(x)dx - \int_0^a f(x)dx}{h}$$

$$= \frac{\int_a^{a+h} f(x)dx}{h}$$

$f(x_M)$ sei der größte und $f(x_m)$ der kleinste Funktionswert von f auf [a,a+h]. Dann gilt

$$h \cdot f(x_m) \leq \int_a^{a+h} f(x)dx \leq h \cdot f(x_M)$$

$$\Leftrightarrow f(x_m) \leq \frac{\int_a^{a+h} f(x)dx}{h} \leq f(x_M)$$

$$\Leftrightarrow f(x_m) \leq \frac{F(a+h)-F(a)}{h} \leq f(x_M)$$

$$\xrightarrow[h \to 0]{} f(a) \leq F'(a) \leq f(a)$$

1. Begründe die einzelnen Schritte.
2. Statt $F'(a) = f(a)$ gilt natürlich ebenso $F'(x) = f(x)$. Eine Funktion mit der Eigenschaft $F'(x) = f(x)$ nennt man **Stammfunktion von f(x)**. Bestimme jeweils drei verschiedene Stammfunktionen F(x) von f(x):

   a) $f(x) = x^5$ b) $f(x) = \sin(x)$ c) $f(x) = e^{2 \cdot x}$ d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e) $f(x) = \sqrt{x}$
3. Prüfe, ob die in 2. gefundenen Stammfunktionen auch Integralfunktionen sein können.
4. Berechne mit den drei verschiedenen Funktionen F(x) aus 2. jeweils

   a) $\int_1^2 x^5 \, dx$ b) $\int_\pi^{2\cdot\pi} \sin(x)dx$ c) $\int_{0.5}^1 e^{2 \cdot x} \, dx$ d) $\int_{-1}^{-0.01} \frac{1}{x^2} dx$ e) $\int_4^9 \sqrt{x} \, dx$
5. Berechne zu $f(x) = -2 \cdot x + 6$ und $a = 0,1,2,\ldots,6$ jeweils $\int_0^a f(x)dx$. Veranschauliche deine Rechnungen mit einer Skizze. Was fällt auf? Wie lässt es sich erklären?
6. Berechne $\int_1^2 x^2 dx$ und $\int_2^1 x^2 dx$. Was fällt auf? Wie lässt es sich erklären?
7. Begründe, ob sich $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx$, $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ und $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ berechnen lassen.
8. Versuche eine Stammfunktionen zu $f(x) = \frac{1}{x}$ zu finden.
9. In der Differentialrechnung gibt es die Faktorregel, Summenregel, Potenzregel, Produktregel und die Kettenregel. Gibt es so etwas auch in der Integralrechnung?