Die Ableitung trigonometrischer Funktionen

Aus f(x) = sin(x) folgt:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$$

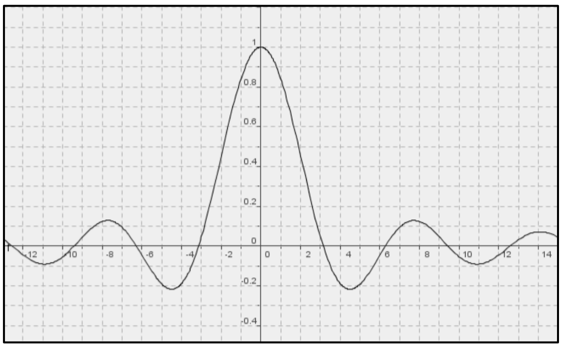
$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h}\right)$$

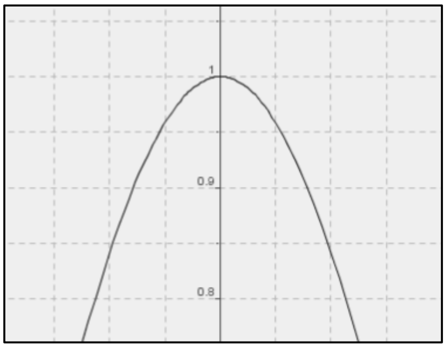
$$=\lim_{h\to 0}\left(\sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\frac{\sin(h)}{h}\right)$$

$$=\sin(x)\cdot\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right)+\cos(x)\cdot\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin(h)}{h}\right)$$

1. Analyse von $\frac{\sin(h)}{h}$: Als erste Idee kann man den Term von einem GTR plotten lassen



Zoom:



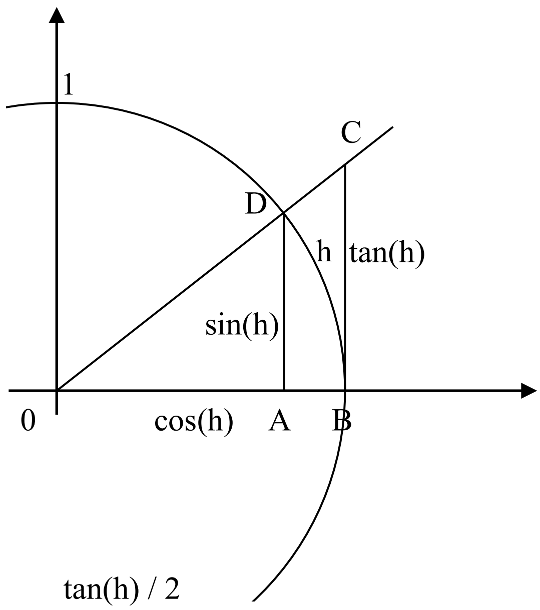
Daraus folgt die Vermutung: $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1$

Begründung:

Aus der Abbildung rechts folgt

- Das Dreieck OAD ist im Tortenstück OBD enthalten
- Das Tortenstück OBD ist im Dreieck OBC enthalten
- Dann gilt für die Flächeninhalte dieser 3 Figuren

  A(OAD) ≤ A(OBD) ≤ A(OBC)



- Diese 3 Flächeninhalte kann man berechnen:
  - A(OAD) = cos(h)·sin(h) / 2
  - Aus $\frac{h}{2\pi}=\frac{A(OBD)}{\pi}$ folgt A(OBD) = h / 2
  - A(OBC) = tan(h) / 2

- Also gilt:

cos(h)·sin(h) / 2	≤	h / 2	≤	tan(h) / 2
cos(h)·sin(h)	≤	h	≤	tan(h)
cos(h)	≤	h / sin(h)	≤	1 / cos(h)
1/cos(h)	≥	sin(h) / h	≥	cos(h)

- Für h=0 gilt cos(h)=1. Also gilt

1/1	≥	sin(h) / h	≥	1

Daher wird sin(h)/h von diesen beiden Einsen (Seiten) eingeengt und strebt ebenfalls gegen 1! Also gilt die Vermutung!

2. Analyse von $\frac{\cos(h)-1}{h}$: Es gilt

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right)$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{(\cos(h)-1)(\cos(h)+1)}{h(\cos(h)+1)}\right)$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{(\cos(h))^2-1}{h(\cos(h)+1)}\right)$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{-(\sin(h))^2}{h(\cos(h)+1)}\right)$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(-\frac{(\sin(h))^2}{h^2}\cdot\frac{h}{\cos(h)+1}\right)$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(-\left(\frac{\sin(h)}{h}\right)^2\cdot\frac{h}{\cos(h)+1}\right)$$
$$=-1^2\cdot\frac{0}{1+1}$$
$$=0$$

Zusammenfassend gilt für f(x) = sin(x):

$$f'(x)$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(\sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(x)\frac{\sin(h)}{h}\right)$$
$$=\sin(x)\cdot 0+\cos(x)\cdot 1$$
$$=\cos(x)$$

Oder kurz $\boxed{(\sin(x))'=\cos(x)}$.

Mit diesem Ergebnis kann man die Ableitung der Cosinus-Funktion bestimmen:
Aus f(x) = cos(x) folgt

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}\right)$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h}\right)$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(\cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h}-\sin(x)\frac{\sin(h)}{h}\right)$$
$$=\cos(x)\cdot 0-\sin(x)\cdot 1$$
$$=-\sin(x)$$

Oder kurz $\boxed{(\cos(x))'=-\sin(x)}$.

Aufgabe: Bestimme f '(x), f ''(x), f '''(x), ..., $f^{4298}(x)$, … . Welche Regelmäßigkeit kann man erkennen?