Unterlagen für die Lehrkraft

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2015

Mathematik

1. Aufgabenart

Analysis, Stochastik

2. Aufgabenstellung

Teil I: Hilfsmittelfreier Teil	
Aufgabe 1: Analysis	*(6 Punkte)*
Aufgabe 2: Stochastik	*(6 Punkte)*
Teil II: Innermathematische und kontextbezogene Aufgaben mit Hilfsmitteln	
Aufgabe 3: Analysis (innermathematische Aufgabe)	*(24 Punkte)*
Aufgabe 4: Analysis (kontextbezogene Aufgabe)	*(24 Punkte)*

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezug zu den Vorgaben 2015

Teil I: Hilfsmittelfreier Teil

Inhaltsfeld Funktionen und Analysis (A)

- Grundlegende Eigenschaften von Potenz-, Exponential- und Sinusfunktionen
- Grundverständnis des Ableitungsbegriffs
- Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen (Untersuchung ganzrationaler Funktionen bis zum Grad drei)

Inhaltsfeld Stochastik (S)

- Mehrstufige Zufallsexperimente
- Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Teil II: Innermathematische und kontextbezogene Aufgaben mit Hilfsmitteln

Inhaltsfeld Funktionen und Analysis (A)

- Grundlegende Eigenschaften von Potenz-, Exponential- und Sinusfunktionen
- Grundverständnis des Ableitungsbegriffs
- Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen

5. Zugelassene Hilfsmittel

Teil I:

- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Teil II:

- Graphikfähiger Taschenrechner (GTR) oder Computeralgebrasystem (CAS)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

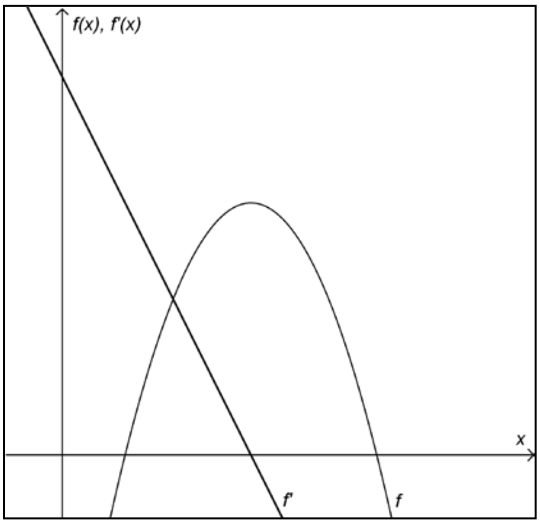
Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Schülerinnen und Schüler muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Aufgabe 1: Analysis

Modelllösung a)

(1) $-x^2+6\cdot x-5=0 \Leftrightarrow x^2-6\cdot x+5=0 \Leftrightarrow x=3-\sqrt{3^2-5} \vee x=3+\sqrt{3^2-5} \Leftrightarrow x=1 \vee x=5$

(2)



[Aus der Skizze muss deutlich werden, dass der Graph von f' eine Gerade mit negativer Steigung ist, die die x-Achse an der Extremstelle von f schneidet.]

Modelllösung b)

Die x-Koordinate des Scheitelpunktes des Graphen von f liegt in der Mitte zwischen seinen beiden Nullstellen 1 und 5. Es gilt $f(3)=4$. Verschiebt man also den Graphen von f um vier Einheiten nach unten, so besitzt der verschobene Graph genau einen gemeinsamen Punkt mit der x-Achse.

Aufgabe 2: Stochastik

Modelllösung a)

	Linderung	keine Linderung	Gesamt
Tablette ohne Wirkstoff	2 % = 0,02	38 % = 0,38	40 % = 0,40
Tablette mit Wirkstoff	48 % = 0,48	12 % = 0,12	60 % = 0,60
Gesamt	50 % = 0,50	50 % = 0,50	100 % = 1

Modelllösung b)

P(„Tablette mit Wirkstoff“ | „Linderung“) $=\dfrac{0,48}{0,5}=0,96=96\ \%$

Aufgabe 3: Analysis (innermathematische Aufgabe)

Modelllösung a)

Aus der Gleichung $f(x)=0$ ergibt sich mit dem GTR/CAS die Nullstelle $x \approx -0{,}104$.

Modelllösung b)

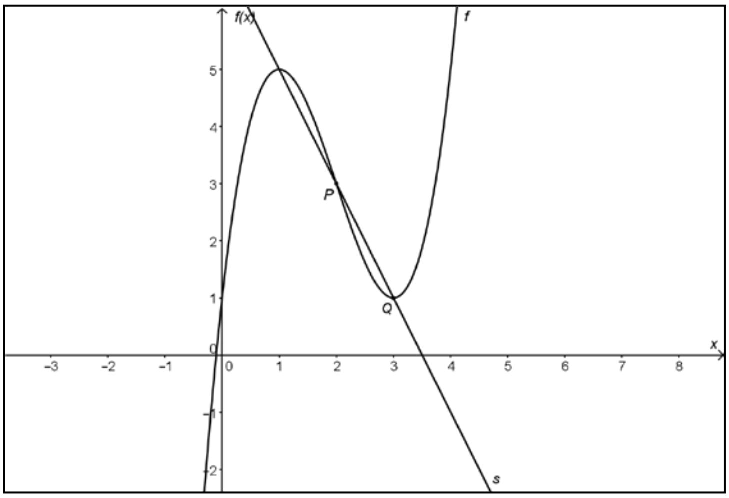
$f'(x)=3\cdot x^2-12\cdot x+9$

Aus der notwendigen Bedingung $f'(x)=0$ ergeben sich die beiden Lösungen $x_1=1$ und $x_2=3$.

Da zusätzlich $f'(0)=9>0$, $f'(2)=-3<0$ und $f'(4)=9>0$ gelten, liegt an der Stelle $x_1=1$ ein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte von f' von + nach – und an der Stelle $x_2=3$ ein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte von f' von – nach + vor. 1 ist also eine lokale Maximalstelle und 3 eine lokale Minimalstelle von f.

Da außerdem $f(1)=5$ und $f(3)=1$ gelten, besitzt der Graph von f den lokalen Hochpunkt $H(\,1\mid 5\,)$ und den lokalen Tiefpunkt $T(\,3\mid 1\,)$.

Modelllösung c)



Ansatz: $s: y=m\cdot x+b$:

$$m=\frac{1-3}{3-2}=-2$$

Einsetzen der Koordinaten des Punktes $P(\,2\mid 3\,)$ liefert:

$-2\cdot 2+b=3 \Leftrightarrow b=7$

Damit ist die Gleichung der Sekante $s: y=-2\cdot x+7$.

Modelllösung d)

Es handelt sich um die Stelle $a = 2$.

- $f'(2)$ ist die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $P(2\,|\,3)$.
- Auf dem Graphen von f wird ein Nachbarpunkt $N(x_2\,|\,f(x_2))$ des Punktes P gewählt und mit Hilfe des Differenzenquotienten $\frac{f(x_2)-3}{x_2-2}$ die Steigung der Sekante durch die beiden Punkte N und P berechnet.
- Nun wird der Wert von x_2 an 2 angenähert. Dadurch läuft der Punkt N auf dem Graphen von f auf den Punkt P zu, die Sekante durch die beiden Punkte N und P nähert sich der Tangente im Punkt P an. Die Steigung der Sekante durch N und P nähert sich dadurch der Steigung der Tangente im Punkt P und somit der Ableitung $f'(2)$ an.

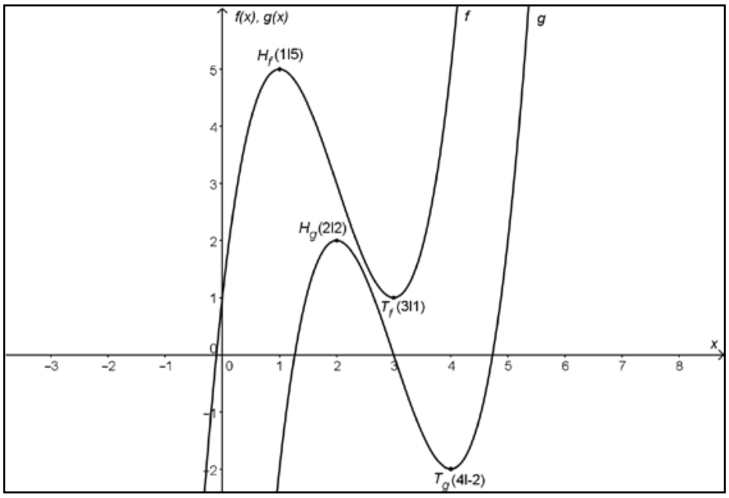
oder

- $f'(2)$ ist die lokale Änderungsrate der Funktion f an der Stelle 2.
- Mit Hilfe des Differenzenquotienten $\frac{f(x_2)-3}{x_2-2}$ wird die durchschnittliche Änderungsrate der Funktion f über dem Intervall $[2;x_2]$ berechnet.
- Nun wird der Wert von x_2 an 2 angenähert, die obere Intervallgrenze x_2 läuft auf die untere Intervallgrenze 2 zu. Die durchschnittliche Änderungsrate der Funktion f über dem Intervall $[2;x_2]$ nähert sich dadurch der lokalen Änderungsrate der Funktion f an der Stelle 2 und somit der Ableitung $f'(2)$ an.

oder

- Die Ableitung $f'(2)$ ist definiert als Grenzwert $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{2+h-2} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ des Differenzenquotienten $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ (bzw. als Grenzwert $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ des Differenzenquotienten $\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$).
- Im Differenzenquotienten wird der Wert von h immer dichter an 0 angenähert (bzw. der Wert von x immer dichter an 2 angenähert), der Wert des Differenzenquotienten nähert sich dadurch dem Grenzwert und somit der Ableitung $f'(2)$ an.

Modelllösung e)



Der Vergleich der Koordinaten der Extrempunkte $H_f\left(1 \mid 5\right)$ und $T_f\left(3 \mid 1\right)$ des Graphen von f mit den Koordinaten der Extrempunkte $H_g\left(2 \mid 2\right)$ und $T_g\left(4 \mid -2\right)$ des Graphen von g zeigt, dass der Graph der Funktion g durch die Hintereinanderausführung einer Verschiebung um eine Einheit nach rechts und einer Verschiebung um drei Einheiten nach unten aus dem Graphen von f hervorgeht.

[Die Anfertigung einer Skizze wird hier nicht erwartet. Die Skizze dient nur zur Orientierung für die Lehrkraft.]

Aufgabe 4: Analysis (kontextbezogene Aufgabe)

Modelllösung a)

(1) $f(1) = 780$

Um 7:00 Uhr sind 780 m³ Wasser im Speicher des Turmes vorhanden.

(2) Aus der Bedingung $f(t) = 1000$ ergeben sich die drei Näherungslösungen $t_1 \approx -0,75$, $t_2 \approx 0,50$ und $t_3 \approx 1,25$.

$t_1 \approx -0,75$ befindet sich nicht im betrachteten Intervall $[0;1,5]$.

Weiterhin gilt $f(0) = 1467 > 1000$, $f(1) = 780 < 1000$ (s. o.) und $f(1,5) = 1561,5 > 1000$.

[Alternativ ist eine graphische Lösung denkbar, in der z. B. anhand des abgebildeten Graphen oder mit Hilfe des GTR bzw. CAS die Schnittstellen des Graphen von f mit der Geraden zu $y = 1000$ ermittelt werden.]

Etwa zwischen 6:00 Uhr und 6:30 Uhr und zwischen 7:15 Uhr und 7:30 Uhr liegt die Wassermenge über 1000 m^3.

Modelllösung b)

$f'(t) = 3000 \cdot t^2 - 2000 \cdot t - 687$

Aus der notwendigen Bedingung $f'(t) = 0$ für lokale Extremstellen ergeben sich die beiden Näherungslösungen $t_1 \approx -0,25$ und $t_2 \approx 0,92$.

$t_1 \approx -0,25$ befindet sich nicht im betrachteten Intervall $[0;1,5]$.

Wegen $f'(0,9) = -57 < 0$ und $f'(1) = 313 > 0$ liegt an der Stelle t_2 ein Vorzeichenwechsel der Funktionswerte von f' von – nach + und damit ein lokales Minimum von f vor.

Wegen $f(0) = 1467$, $f(0,92) \approx 767,25$ und $f(1,5) = 1561,5$ ist die Wassermenge um ca. 6:55 Uhr mit ungefähr 767,25 m^3 minimal, sie liegt dann ca. 232,75 m^3 unterhalb des Sollwertes.

Modelllösung c)

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = -687$$

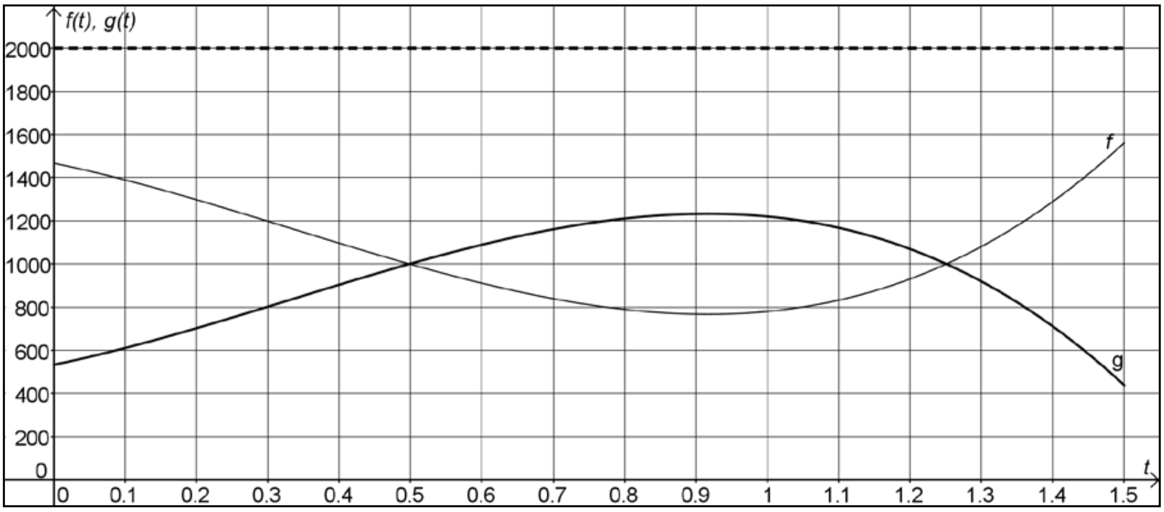
Die Wassermenge im Speicher des Turmes nimmt zwischen 6:00 Uhr und 7:00 Uhr durchschnittlich mit einer Rate von 687 m^3 pro Stunde ab.

$f'(1) = 313$

Die Wassermenge im Speicher des Turmes nimmt um 7:00 Uhr mit einer momentanen Rate von 313 m^3 pro Stunde zu.

Modelllösung d)

(1)



(2) Die Funktionswerte der Funktion g zeigen, wie viele m^3 Wasser noch vom Speicher des Wasserturms aufgenommen werden können.

7. Bewertungsbogen zur Klausur

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule:____

Aufgabe 1: Analysis

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	(1) berechnet die Nullstellen der Funktion f .	2	
2	(2) skizziert in die *Abbildung* den Graphen der Ableitungsfunktion f' .	2	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) …………………………………………………………………………........... …………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe a)	**4**	

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	ermittelt, um wie viele Einheiten der Graph von f nach unten verschoben werden muss, so dass der verschobene Graph nur einen gemeinsamen Punkt mit der x-Achse besitzt.	2	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (2) …………………………………………………………………………........... …………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe b)	**2**	

	Summe insgesamt	**6**	

Aufgabe 2: Stochastik

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	stellt den beschriebenen Sachverhalt dar, indem er alle Prozentsätze ermittelt und in die *Tabelle* einträgt.	3	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (3) …………………………………………………………………………............ …………………………………………………………………………............			
	Summe Teilaufgabe a)	**3**	

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dass die Versuchsperson eine Tablette mit Wirkstoff erhalten hat.	3	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (3) …………………………………………………………………………............ …………………………………………………………………………............			
	Summe Teilaufgabe b)	**3**	

	Summe insgesamt	**6**	

Aufgabe 3: Analysis (innermathematische Aufgabe)

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
1	ermittelt auf drei Nachkommastellen genau die Nullstelle der Funktion f .	2	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (2) …………………………………………………………………………............ …………………………………………………………………………............			
	Summe Teilaufgabe a)	**2**	

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	ermittelt rechnerisch den lokalen Hochpunkt und den lokalen Tiefpunkt des Graphen von f .	7	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (7) ………………………………………………………………………......... ………………………………………………………………………..........			
	Summe Teilaufgabe b)	**7**	

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	zeichnet in die *Abbildung* die Sekante *s* durch die Punkte $P(\,2\,|\,3\,)$ und $Q(\,3\,|\,1\,)$ ein.	2	
2	ermittelt rechnerisch eine Gleichung der Sekante *s*.	4	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) ………………………………………………………………………......... ………………………………………………………………………..........			
	Summe Teilaufgabe c)	**6**	

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	gibt an, um welche Stelle *a* es sich handelt, und erklärt, warum die Tabellenwerte sich immer mehr der Ableitung $f'(a)$ annähern.	4	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) ………………………………………………………………………......... ………………………………………………………………………..........			
	Summe Teilaufgabe d)	**4**	

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	ermittelt, durch welche Transformationen der Graph der Funktion g aus dem Graphen der Funktion f hervorgeht, und beschreibt seine Vorgehensweise.	5	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5) …………………………………………………………………………............. ………………………………………………………………………….............			
	Summe Teilaufgabe e)	**5**	

	Summe insgesamt	**24**	

Aufgabe 4: Analysis (kontextbezogene Aufgabe)

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	(1) zeigt, dass um 7:00 Uhr nur noch 780 m^3 Wasser im Speicher des Turmes vorhanden sind.	2	
2	(2) ermittelt näherungsweise die Zeiträume, in denen die Wassermenge über dem Sollwert von 1000 m^3 liegt.	4	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) …………………………………………………………………………............. ………………………………………………………………………….............			
	Summe Teilaufgabe a)	**6**	

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	ermittelt rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem die Wassermenge im Speicher des Turmes minimal ist.	6	
2	berechnet, um wie viele m^3 Wasser der Sollwert zu diesem Zeitpunkt unterschritten wird.	2	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (8) …………………………………………………………………………........... …………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe b)	**8**	

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	berechnet $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}$ und $f'(1)$ und interpretiert die berechneten Werte im Sachzusammenhang.	4	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (4) …………………………………………………………………………........... …………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe c)	**4**	

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität	
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**erreichte Punktzahl**
1	(1) zeichnet den Graphen von *g* in die *Abbildung* ein.	4	
2	(2) erklärt, welche Bedeutung die Funktionswerte $g(t)$ mit $0 \le t \le 1{,}5$ im Sachzusammenhang haben.	2	
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (6) …………………………………………………………………………........... …………………………………………………………………………...........			
	Summe Teilaufgabe d)	**6**	

	Summe insgesamt	**24**	

Festlegung der Gesamtnote

	Lösungsqualität	
	maximal erreichbare Punktzahl	erreichte Punktzahl
Übertrag der Punktsumme aus der ersten Aufgabe	**6**	
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten Aufgabe	**6**	
Übertrag der Punktsumme aus der dritten Aufgabe	**24**	
Übertrag der Punktsumme aus der vierten Aufgabe	**24**	
Gesamtpunktzahl	**60**	

Note

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Noten zu den Punktsummen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Erreichte Punktsummen
sehr gut	52 – 60
gut	43 – 51
befriedigend	34 – 42
ausreichend	25 – 33
mangelhaft	13 – 24
ungenügend	0 – 12