Name: ____________________

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2015

Mathematik

Teil I: Hilfsmittelfreier Teil

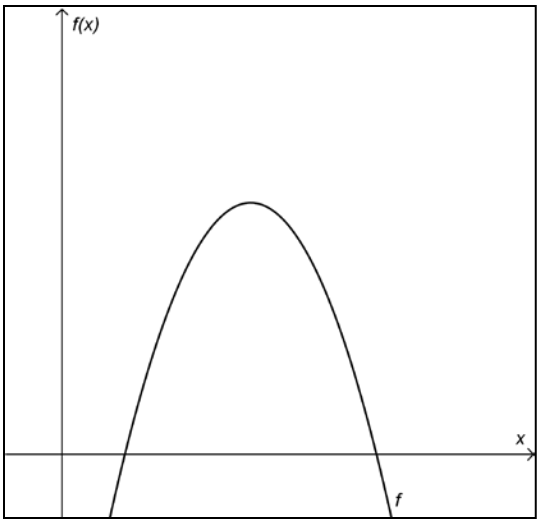
Aufgabe 1: Analysis

Die *Abbildung* zeigt den Graphen der Funktion f mit der Gleichung

$$f(x) = -x^2 + 6 \cdot x - 5 .$$

a) (1) *Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.*

(2) *Skizzieren Sie in die Abbildung den Graphen der Ableitungsfunktion* f'.



Abbildung

(2 + 2 Punkte)

b) *Ermitteln Sie, um wie viele Einheiten der Graph von f nach unten verschoben werden muss, so dass der verschobene Graph nur einen gemeinsamen Punkt mit der x-Achse besitzt.*

(2 Punkte)

Name: ____________________

Aufgabe 2: Stochastik

Eine Firma hat einen neuen Wirkstoff gegen Erkältungsbeschwerden entwickelt, dessen Wirksamkeit an erkälteten Versuchspersonen getestet wurde:

- 60 % der Versuchspersonen erhielten eine Tablette mit dem neuen Wirkstoff, die übrigen Versuchspersonen erhielten eine Tablette ohne Wirkstoff.
- Nach einer Stunde trat insgesamt bei der Hälfte aller Versuchspersonen eine Linderung ein.
- 38 % der Versuchspersonen erhielten eine Tablette ohne Wirkstoff und verspürten keine Linderung.

a) *Stellen Sie den oben beschriebenen Sachverhalt dar, indem Sie alle Prozentsätze ermitteln und in die folgende Tabelle eintragen.*

	Linderung	keine Linderung	Gesamt
Tablette ohne Wirkstoff			
Tablette mit Wirkstoff			
Gesamt			

Tabelle

(3 Punkte)

b) Eine Versuchsperson verspürt eine Linderung.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sie eine Tablette mit Wirkstoff erhalten hat.

(3 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Name: ____________________

Zentrale Klausur am Ende der Einführungsphase 2015

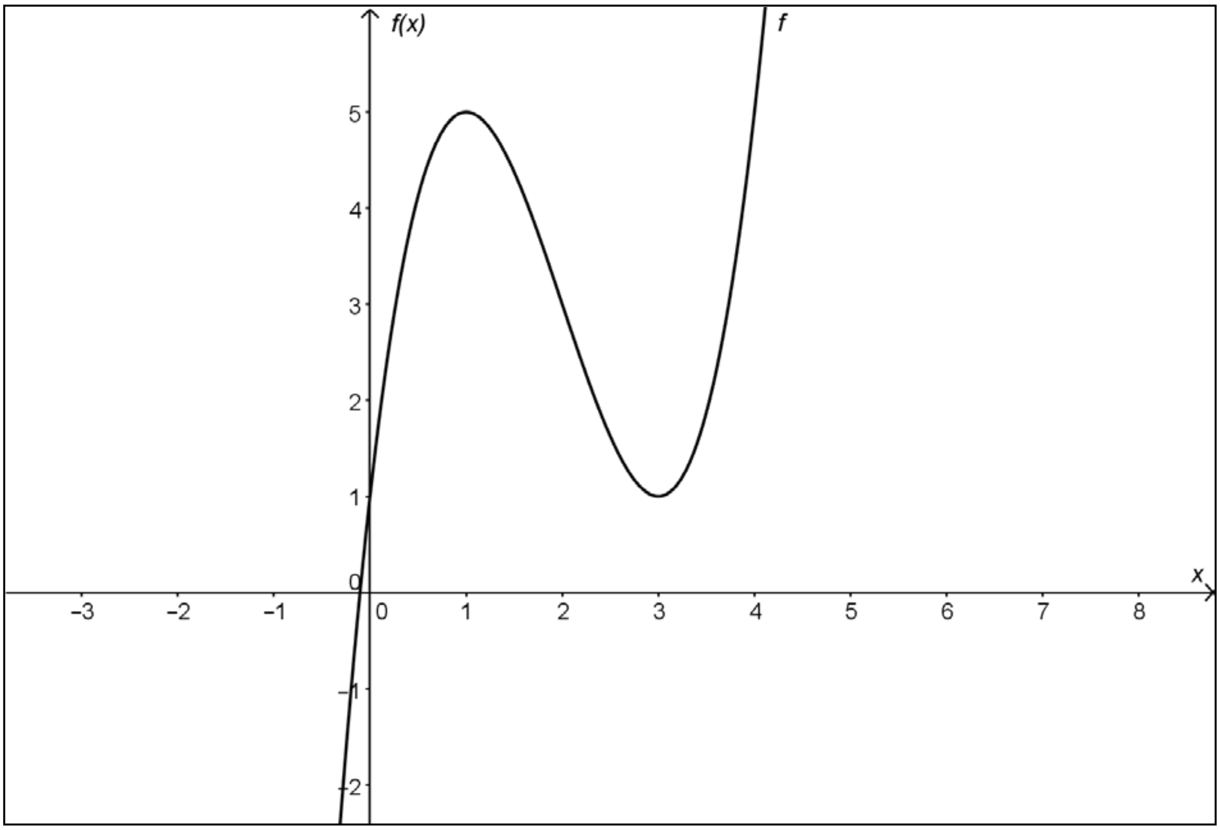
Mathematik

Teil II: Innermathematische und kontextbezogene Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabe 3: Analysis (innermathematische Aufgabe)

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x + 1$.

Die *Abbildung* zeigt den Graphen von f.



Abbildung

Name: ____________________

a) *Ermitteln Sie auf drei Nachkommastellen genau die Nullstelle der Funktion f.*

(2 Punkte)

b) *Ermitteln Sie rechnerisch den lokalen Hochpunkt und den lokalen Tiefpunkt des Graphen von f.*

(7 Punkte)

c) *Zeichnen Sie in die Abbildung die Sekante s durch die Punkte* $P(2\mid 3)$ *und* $Q(3\mid 1)$ *ein.*

Ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung dieser Sekante s.

(6 Punkte)

d) Ein Schüler möchte am Beispiel der Funktion f in einem Referat erklären, wie deren Ableitung $f'(a)$ an einer Stelle a näherungsweise ermittelt werden kann. Dazu hat er eine *Tabelle* angelegt.

Term	$\frac{f(2{,}4)-3}{2{,}4-2}$	$\frac{f(2{,}3)-3}{2{,}3-2}$	$\frac{f(2{,}2)-3}{2{,}2-2}$	$\frac{f(2{,}1)-3}{2{,}1-2}$
Wert	$-2{,}84$	$-2{,}91$	$-2{,}96$	$-2{,}99$

Tabelle

Geben Sie an, um welche Stelle a es sich hier handelt.

Erklären Sie, warum die Tabellenwerte sich immer mehr der Ableitung $f'(a)$ *annähern.*

(4 Punkte)

e) Gegeben ist nun zusätzlich die Funktion g mit der Gleichung

$$g(x) = x^3 - 9\cdot x^2 + 24\cdot x - 18\,.$$

Ermitteln Sie, durch welche Transformationen der Graph der Funktion g aus dem Graphen der Funktion f hervorgeht, und beschreiben Sie Ihre Vorgehensweise.

(5 Punkte)

Name: ____________________

Aufgabe 4: Analysis (kontextbezogene Aufgabe)

Früher wurden in den Städten auf Hügeln oder kleineren Bergen Wassertürme gebaut. Durch das in den Türmen gespeicherte Wasser konnte ein ausreichender Wasserdruck für die Versorgung der Wohnungen mit Trinkwasser sichergestellt werden.

Im Folgenden soll die Wassermenge im Speicher eines Wasserturms untersucht werden.

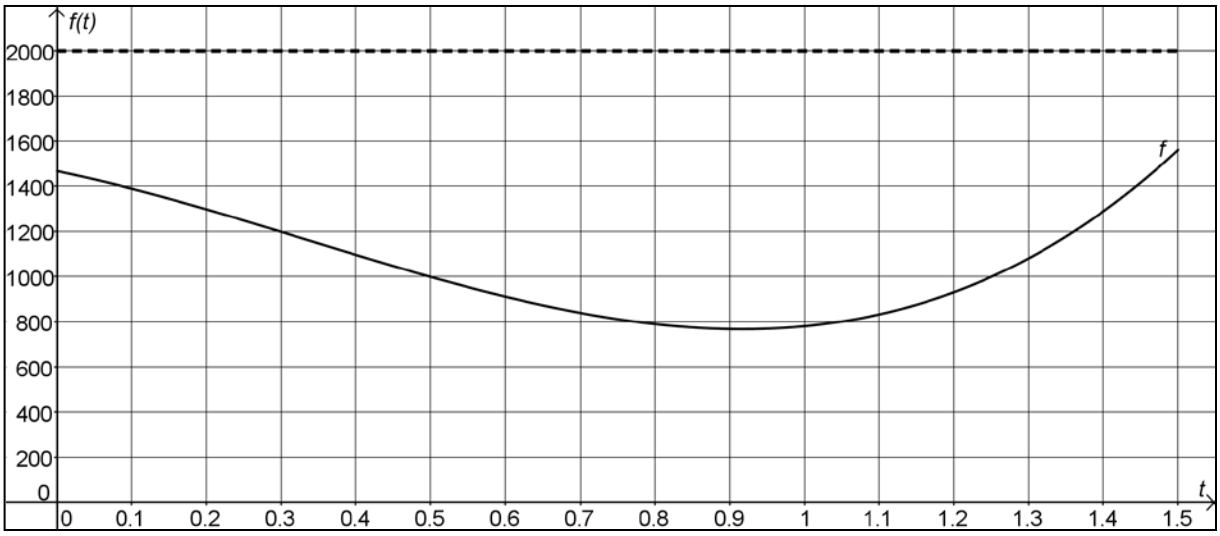
Um den nötigen Wasserdruck zu gewährleisten, soll dafür gesorgt werden, dass ständig mindestens 1000 m^3 Wasser (Sollwert) im Speicher des Turmes vorhanden sind. Die maximale Füllmenge beträgt 2000 m^3.

Für einen bestimmten Tag wird die Wassermenge im Speicher des Turmes im Zeitraum von 6:00 Uhr bis 7:30 Uhr für $0 \le t \le 1{,}5$ durch die Funktion f mit der Gleichung

$$f(t) = 1000 \cdot t^3 - 1000 \cdot t^2 - 687 \cdot t + 1467$$

modelliert. Dabei bezeichnet t die Zeit in Stunden, die seit 6:00 Uhr vergangen ist, und $f(t)$ die Wassermenge im Speicher des Turmes in m^3.

Der Graph der Funktion f ist in der folgenden *Abbildung* dargestellt.



Abbildung

Mit der Funktion f ist es möglich, die folgenden Aufgabenstellungen zu bearbeiten.

Name: ____________________

a) (1) *Zeigen Sie, dass um 7:00 Uhr nur noch 780 m^3 Wasser im Speicher des Turmes vorhanden sind.*

(2) *Ermitteln Sie näherungsweise die Zeiträume, in denen die Wassermenge über dem Sollwert von 1000 m^3 liegt.*

(2 + 4 Punkte)

b) *Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem die Wassermenge im Speicher des Turmes minimal ist.*

Berechnen Sie, um wie viele m^3 Wasser der Sollwert zu diesem Zeitpunkt unterschritten wird.

(8 Punkte)

c) *Berechnen Sie* $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}$ *und* $f'(1)$ *und interpretieren Sie die berechneten Werte im Sachzusammenhang.*

(4 Punkte)

d) Gegeben ist nun zusätzlich die Funktion g mit der Gleichung

$$g(t) = -1000 \cdot t^3 + 1000 \cdot t^2 + 687 \cdot t + 533.$$

(1) *Zeichnen Sie den Graphen von g in die Abbildung ein.*

(2) *Erklären Sie, welche Bedeutung die Funktionswerte $g(t)$ mit $0 \le t \le 1{,}5$ im Sachzusammenhang haben.*

(4 + 2 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- Graphikfähiger Taschenrechner (GTR) oder Computeralgebrasystem (CAS)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung