

## *Unterlagen für die Lehrkraft*

# **Abiturprüfung 2010**

## *Mathematik, Grundkurs*

---

### **1. Aufgabenart**

Stochastik mit Alternative 1 (ein- und zweiseitiger Hypothesentest)

### **2. Aufgabenstellung**

siehe Prüfungsaufgabe

### **3. Materialgrundlage**

- entfällt

### **4. Bezüge zu den Vorgaben 2010**

#### *1. Inhaltliche Schwerpunkte*

- Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
  - Binomialverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung
- Alternative 1:
- Einseitiger Hypothesentest

#### *2. Medien/Materialien*

- entfällt

### **5. Zugelassene Hilfsmittel**

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

## 6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

### 6.1 Modellösungen

#### Modellösung a)

Die Zufallsgröße  $X$  ist  $B_{100;0,1}$ -verteilt.

$$(1) P(X = 10) = \binom{100}{10} 0,1^{10} 0,9^{90} = 0,1319 .$$

$$(2) P(X \geq 16) = 1 - P(X \leq 15) = 1 - 0,9601 = 0,0399 .$$

$$(3) \mu_X = 100 \cdot 0,1 = 10 \text{ und } \sigma_X = \sqrt{100 \cdot 0,1 \cdot 0,9} = 3;$$

$$P(|X - \mu_X| \leq 1,5 \cdot \sigma_X) = P(5,5 \leq X \leq 14,5) = P(6 \leq X \leq 14) = 0,9274 - 0,0576 \\ = 0,8698 .$$

(Tabelle der  $B_{100; 0,1}$ -Verteilung)

#### Modellösung b)

(1) Die Zufallsgröße  $X$  ist jetzt  $B_{n;0,1}$ -verteilt:

$$P(X \geq 1) \geq 0,95 \Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0,95 \Leftrightarrow P(X = 0) \leq 0,05 \Leftrightarrow 0,9^n \leq 0,05 \\ \Leftrightarrow n \cdot \lg 0,9 \leq \lg 0,05 \Rightarrow n \geq 28,4$$

Der Spieler muss mindestens 29-mal würfeln.

(2) Die Zufallsgröße  $Y$  zählt die Anzahl der Würfe bis zur ersten „6“.

$$P(Y = 5) = 0,9^4 \cdot 0,1 = 0,06561$$

#### Modellösung c)

(1) Getestet werden die Hypothesen

$$H_0 : p \geq 1/6 \text{ gegen } H_1 : p < 1/6.$$

[Eine im Übrigen konsistente Lösung bei entgegengesetzter Wahl der Hypothesen soll auch akzeptiert werden.]

Die Zufallsgröße  $X$  zählt die Anzahl der Sechsen in 200 Würfeln. Bei Annahme der

Nullhypothese ist  $X$   $B_{200;1/6}$ -verteilt mit  $\mu_X \approx 33,3$  und  $\sigma_X \approx \sqrt{27,78} \approx 5,27 > 3$ .

Die kritische Grenze  $k$  ist so zu bestimmen, dass  $P_{1/6}(X < k) \leq 0,05$ .

Für das 5 %-Signifikanzniveau ist das der Fall, wenn

$$X < k = \mu_X - 1,64\sigma_X \approx 33,3 - 1,64 \cdot \sqrt{27,78} \approx 24,69 \text{ (}\sigma\text{-Tabelle).}$$

Es ergeben sich der Ablehnungsbereich  $A = \{0, \dots, 24\}$  und der Annahmehereich  $\bar{A} = \{25, \dots, 200\}$ .

Ein Fehler 1. Art liegt vor, wenn die Wahrscheinlichkeit, eine „6“ zu würfeln, tatsächlich (mindestens)  $1/6$  beträgt, aber aufgrund des Würfelergbnisses von  $p < 1/6$  (gefälschter Würfel) ausgegangen wird.

Ein Fehler 2. Art liegt dann vor, wenn man aufgrund des Würfelergbnisses annimmt, dass die Wahrscheinlichkeit für eine „6“ mindestens  $1/6$  beträgt, aber tatsächlich  $p < 1/6$  ist.

(2) Ein Würfelergbnis von 26 Sechsen ist mit der Hypothese noch verträglich;  $H_0$  kann auf dem Signifikanzniveau 5 % nicht abgelehnt werden.

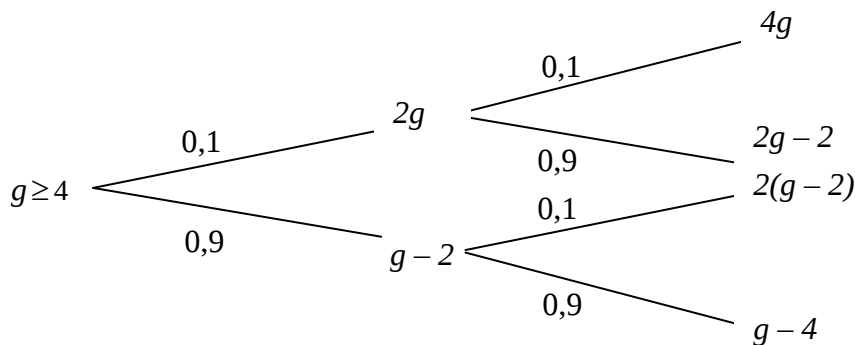
(3) Zu berechnen ist die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art.

$X$  ist jetzt  $B_{200;0,1}$ -verteilt; mit der Tabelle der Binomialverteilung ist

$$P(X \geq 25) = 1 - P(X \leq 24) = 1 - 0,8551 = 0,1449 .$$

**Modelllösung d)**

(1) Ein Baumdiagramm kann den Spielverlauf aus der Sicht des Spielers A z. B. so veranschaulichen; die Verwendung der Variable  $g$  ist hier noch nicht erforderlich:



(2) Die Zufallsgröße  $X$  beschreibt hier den Gewinn des Spielers A.

$X$  hat die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$x$	$3g$	$g - 2$	$g - 4$	$- 4$
$P(X = x)$	$0,1^2$	$0,1 \cdot 0,9$	$0,9 \cdot 0,1$	$0,9^2$

Es handelt sich um ein faires Spiel, wenn  $E(X) = 0$  ist:

$$E(X) = 3g \cdot 0,01 + (g - 2) \cdot 0,09 + (g - 4) \cdot 0,09 - 4 \cdot 0,81 = 0,21 g - 3,78 = 0 \Leftrightarrow g = 18.$$

Der Einsatz für ein faires Spiel beträgt genau 18 €.

## 6.2 Teilleistungen – Kriterien

### Teilaufgabe a)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB) <sup>1</sup>
	Der Prüfling	
1	(1) berechnet $P(X = 10)$ .	2 (I)
2	(2) berechnet $P(X \geq 16)$ .	3 (I)
3	(3) berechnet $\mu_X$ und $\sigma_X$ und bestimmt $P(6 \leq X \leq 14)$ .	5 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

### Teilaufgabe b)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	(1) ermittelt einen geeigneten Lösungsansatz.	3 (II)
2	(1) bestimmt die Anzahl der erforderlichen Würfe.	3 (II)
3	(2) bestimmt $P(Y = 5)$ .	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

### Teilaufgabe c)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	(1) nennt die Hypothesen und beschreibt die Zufallsgröße.	3 (I)
2	(1) ermittelt die kritische Grenze / den Ablehnungsbereich.	4 (II)
3	(1) beschreibt die Fehler 1. und 2. Art.	4 (II)
4	(2) entscheidet, die Hypothese $H_0$ nicht abzulehnen.	3 (II)
5	(3) bestimmt die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

<sup>1</sup> AFB = Anforderungsbereich

**Teilaufgabe d)**

	<b>Anforderungen</b>	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	<b>Der Prüfling</b>	
1	(1) stellt den Spielverlauf im Baumdiagramm dar.	6 (II)
2	(2) stellt die Ergebnisse mit Hilfe des Einsatzes dar und bestimmt die Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Gewinn.	5 (III)
3	(2) ermittelt die Höhe des Einsatzes für ein faires Spiel.	3 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

**7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit**

Name des Prüflings: \_\_\_\_\_ Kursbezeichnung: \_\_\_\_\_

Schule: \_\_\_\_\_

**Teilaufgabe a)**

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK <sup>2</sup>	ZK	DK
1	(1) berechnet $P(X = 10)$ .	2 (I)			
2	(2) berechnet $P(X \geq 16)$ .	3 (I)			
3	(3) berechnet $\mu_X$ und ...	5 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (10) ..... .....					
<b>Summe Teilaufgabe a)</b>		<b>10</b>			

**Teilaufgabe b)**

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	(1) ermittelt einen geeigneten ...	3 (II)			
2	(1) bestimmt die Anzahl ...	3 (II)			
3	(2) bestimmt $P(Y = 5)$ .	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (9) ..... .....					
<b>Summe Teilaufgabe b)</b>		<b>9</b>			

<sup>2</sup> EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

**Teilaufgabe c)**

Anforderungen		Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	(1) nennt die Hypothesen ...	3 (I)			
2	(1) ermittelt die kritische ...	4 (II)			
3	(1) beschreibt die Fehler ...	4 (II)			
4	(2) entscheidet, die Hypothese ...	3 (II)			
5	(3) bestimmt die Wahrscheinlichkeit ...	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (17) ..... .....					
<b>Summe Teilaufgabe c)</b>		<b>17</b>			

**Teilaufgabe d)**

Anforderungen		Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	(1) stellt den Spielverlauf ...	6 (II)			
2	(2) stellt die Ergebnisse ...	5 (III)			
3	(2) ermittelt die Höhe...	3 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (14) ..... .....					
<b>Summe Teilaufgabe d)</b>		<b>14</b>			

<b>Summe insgesamt</b>		<b>50</b>			
------------------------	--	-----------	--	--	--

**Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)**

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktzahl aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	50			
Übertrag der Punktzahl aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	50			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	100			
aus der Punktzahl resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOST				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktzahlen aus EK und ZK: \_\_\_\_\_

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: \_\_\_\_\_

Die Klausur wird abschließend mit der Note: \_\_\_\_\_ (\_\_\_\_ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum



**Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)**

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

<b>Note</b>	<b>Punkte</b>	<b>Erreichte Punktzahl</b>
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0