



Name: _____

Abiturprüfung 2010

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Beim Spielen mit einem Würfel stellt ein Spieler fest, dass die Augenzahl „1“ überdurchschnittlich häufig, die Augenzahl „6“ dagegen relativ selten auftritt. Dies führt zu der Vermutung, dass die Wahrscheinlichkeit, eine „6“ zu würfeln, nur 10 % beträgt. Gehen Sie zunächst davon aus, dass die Vermutung zutrifft.

a) Mit dem Würfel wird 100-mal nacheinander gewürfelt. Die Zufallsgröße X zählt die Anzahl der Sechsen.

- (1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in 100 Würfeln genau 10 Sechsen auftreten.
- (2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in 100 Würfeln mindestens 16 Sechsen auftreten.
- (3) Berechnen Sie Erwartungswert μ_X und Standardabweichung σ_X und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass X um höchstens $1,5 \cdot \sigma_X$ von μ_X abweicht.

(10 Punkte)

b) Mit dem Würfel wird mehrmals nacheinander gewürfelt.

- (1) Ermitteln Sie, wie oft ein Spieler mindestens würfeln muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 95 % mindestens einmal eine „6“ zu erhalten.
- (2) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass erst im fünften Wurf zum ersten Mal eine Sechs auftritt.

(9 Punkte)



Name: _____

c) Die Vermutung, dass die „6“ nur mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als $1/6$ auftritt, es sich also um einen gefälschten Würfel handelt, soll getestet werden. Dazu wird der Würfel 200-mal geworfen.

- (1) *Beschreiben Sie einen sinnvollen Hypothesentest zum Signifikanzniveau 5 % (Zufallsgröße, Fehler 1. und 2. Art im Sachzusammenhang, Entscheidungsregel).*
- (2) *In den 200 Würfeln erhält man 26-mal die „6“. Untersuchen Sie, ob dieses Ergebnis noch mit der geäußerten Vermutung verträglich ist.*
- (3) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass aufgrund der in (1) aufgestellten Entscheidungsregel davon ausgegangen wird, dass eine „6“ in mindestens $1/6$ der Würfe auftritt, obwohl die Wahrscheinlichkeit dafür nur 10 % beträgt.*

(17 Punkte)

d) Die Wahrscheinlichkeit, eine „6“ zu würfeln, sei weiter 0,1.

Mit diesem Würfel führen nun zwei Spieler A und B ein Glücksspiel durch.

Spieler A legt einen bestimmten Geldbetrag g ($g \geq 4$ €) als Einsatz auf den Tisch. Dann würfelt er einmal. Fällt eine „6“, so muss Spieler B die auf dem Tisch liegende Summe verdoppeln; fällt keine „6“, darf Spieler B sich 2 € vom Tisch nehmen.

Dann wirft Spieler A den Würfel ein zweites Mal.

Fällt eine „6“, so muss Spieler B die auf dem Tisch liegende Summe wiederum verdoppeln; fällt keine „6“, darf Spieler B sich erneut 2 € vom Tisch nehmen.

Damit ist das Spiel beendet und Spieler A erhält den noch auf dem Tisch liegenden Restbetrag.

- (1) *Stellen Sie den Spielverlauf in geeigneter Weise durch ein Baumdiagramm dar.*
- (2) *Ermitteln Sie, wie groß der Einsatz des Spielers A sein muss, damit dieses Spiel fair ist.*

(14 Punkte)



Name: _____

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Tabelle 1: σ -Regeln für Binomialverteilungen

Eine mit den Parametern n und p binomialverteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$.

Wenn die LAPLACE-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist, gelten die σ -Regeln:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,683$	$P(\mu - 1,64\sigma < X < \mu + 1,64\sigma) \approx 0,90$
$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,954$	$P(\mu - 1,96\sigma < X < \mu + 1,96\sigma) \approx 0,95$
$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,997$	$P(\mu - 2,58\sigma < X < \mu + 2,58\sigma) \approx 0,99$



Name: _____

Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für $n = 10$ und $n = 20$

$$F(n; p; k) = B(n; p; 0) + \dots + B(n; p; k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \dots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

		p										
n	k	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,5		n		
10	0	0,8171	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010		9		
	1	0,9838	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107		8		
	2	0,9991	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547		7		
	3		0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719		6		
	4		0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770		5		
	5			0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230		4		
	6				0,9991	0,9965	0,9894	0,8281		3		
	7				0,9999	0,9996	0,9984	0,9453		2		
	8		Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000						0,9999	0,9893		1
	9							0,9990			0	
20	0	0,6676	0,3585	0,1216	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000		19		
	1	0,9401	0,7358	0,3917	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000		18		
	2	0,9929	0,9245	0,6769	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002		17		
	3	0,9994	0,9841	0,8670	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013		16		
	4		0,9974	0,9568	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059		15		
	5		0,9997	0,9887	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207		14		
	6			0,9976	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577		13		
	7			0,9996	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316		12		
	8			0,9999	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517		11		
	9				0,9974	0,9861	0,9520	0,4119		10		
	10				0,9994	0,9961	0,9829	0,5881		9		
	11				0,9999	0,9991	0,9949	0,7483		8		
	12					0,9998	0,9987	0,8684		7		
	13						0,9997	0,9423		6		
	14							0,9793		5		
	15							0,9941		4		
	16		Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000						0,9987			3
	17							0,9998			2	
n		0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,7	0,5	k	n		

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n; p; k) = 1 -$ abgelesener Wert



Name: _____

Tabelle 3: Kumulierte Binomialverteilung für $n = 50$

$$F(n; p; k) = B(n; p; 0) + \dots + B(n; p; k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \dots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	k	p								n	n
		0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		
50	0	0,3642	0,0769	0,0052	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	49	50
	1	0,7358	0,2794	0,0338	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	48	
	2	0,9216	0,5405	0,1117	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	47	
	3	0,9822	0,7604	0,2503	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	46	
	4	0,9968	0,8964	0,4312	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	45	
	5	0,9995	0,9622	0,6161	0,0480	0,0070	0,0007	0,0000	0,0000	44	
	6	0,9999	0,9882	0,7702	0,1034	0,0194	0,0025	0,0000	0,0000	43	
	7		0,9968	0,8779	0,1904	0,0453	0,0073	0,0001	0,0000	42	
	8		0,9992	0,9421	0,3073	0,0916	0,0183	0,0002	0,0000	41	
	9		0,9998	0,9755	0,4437	0,1637	0,0402	0,0008	0,0000	40	
	10			0,9906	0,5836	0,2622	0,0789	0,0022	0,0000	39	
	11			0,9968	0,7107	0,3816	0,1390	0,0057	0,0000	38	
	12			0,9990	0,8139	0,5110	0,2229	0,0133	0,0002	37	
	13			0,9997	0,8894	0,6370	0,3279	0,0280	0,0005	36	
	14			0,9999	0,9393	0,7481	0,4468	0,0540	0,0013	35	
	15				0,9692	0,8369	0,5692	0,0955	0,0033	34	
	16				0,9856	0,9017	0,6839	0,1561	0,0077	33	
	17				0,9937	0,9449	0,7822	0,2369	0,0164	32	
	18				0,9975	0,9713	0,8594	0,3356	0,0325	31	
	19				0,9991	0,9861	0,9152	0,4465	0,0595	30	
	20				0,9997	0,9937	0,9522	0,5610	0,1013	29	
	21				0,9999	0,9974	0,9749	0,6701	0,1611	28	
	22					0,9990	0,9877	0,7660	0,2399	27	
	23					0,9996	0,9944	0,8438	0,3359	26	
	24					0,9999	0,9976	0,9022	0,4439	25	
	25						0,9991	0,9427	0,5561	24	
	26						0,9997	0,9686	0,6641	23	
	27						0,9999	0,9840	0,7601	22	
	28							0,9924	0,8389	21	
	29							0,9966	0,8987	20	
	30							0,9986	0,9405	19	
	31							0,9995	0,9675	18	
	32							0,9998	0,9836	17	
	33							0,9999	0,9923	16	
	34								0,9967	15	
	35								0,9987	14	
	36								0,9995	13	
37								0,9998	12		
n		0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	k	n

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n; p; k) = 1 -$ abgelesener Wert



Name: _____

Tabelle 4: Kumulierte Binomialverteilung für $n = 100$

$$F(n; p; k) = B(n; p; 0) + \dots + B(n; p; k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \dots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	k	p									n	
		0,02	0,05	0,1	1/6	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		
100	0	0,1326	0,0059	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	99	
	1	0,4033	0,0371	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	98	
	2	0,6767	0,1183	0,0019	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	97	
	3	0,8590	0,2578	0,0078	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	96	
	4	0,9492	0,4360	0,0237	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	95	
	5	0,9845	0,6160	0,0576	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	94	
	6	0,9959	0,7660	0,1172	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	93	
	7	0,9991	0,8720	0,2061	0,0038	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	92	
	8	0,9998	0,9369	0,3209	0,0095	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	91	
	9		0,9718	0,4513	0,0213	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	90	
	10		0,9885	0,5832	0,0427	0,0057	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	89	
	11		0,9957	0,7030	0,0777	0,0126	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	88	
	12		0,9985	0,8018	0,1297	0,0253	0,0010	0,0000	0,0000	0,0000	87	
	13		0,9995	0,8761	0,2000	0,0469	0,0025	0,0001	0,0000	0,0000	86	
	14		0,9999	0,9274	0,2874	0,0804	0,0054	0,0002	0,0000	0,0000	85	
	15			0,9601	0,3877	0,1285	0,0111	0,0004	0,0000	0,0000	84	
	16			0,9794	0,4942	0,1923	0,0211	0,0010	0,0000	0,0000	83	
	17			0,9900	0,5994	0,2712	0,0376	0,0022	0,0000	0,0000	82	
	18			0,9954	0,6965	0,3621	0,0630	0,0045	0,0000	0,0000	81	
	19			0,9980	0,7803	0,4602	0,0995	0,0089	0,0000	0,0000	80	
	20			0,9992	0,8481	0,5595	0,1488	0,0165	0,0000	0,0000	79	
	21			0,9997	0,8998	0,6540	0,2114	0,0288	0,0000	0,0000	78	
	22			0,9999	0,9369	0,7389	0,2864	0,0479	0,0001	0,0000	77	
	23				0,9621	0,8109	0,3711	0,0755	0,0003	0,0000	76	
	24				0,9783	0,8686	0,4617	0,1136	0,0006	0,0000	75	
	25				0,9881	0,9125	0,5535	0,1631	0,0012	0,0000	74	
	26				0,9938	0,9442	0,6417	0,2244	0,0024	0,0000	73	
	27				0,9969	0,9658	0,7224	0,2964	0,0046	0,0000	72	
	28				0,9985	0,9800	0,7925	0,3768	0,0084	0,0000	71	
	29				0,9993	0,9888	0,8505	0,4623	0,0148	0,0000	70	
	30				0,9997	0,9939	0,8962	0,5491	0,0248	0,0000	69	
	31				0,9999	0,9969	0,9307	0,6331	0,0398	0,0001	68	
	32					0,9984	0,9554	0,7107	0,0615	0,0002	67	
	33					0,9993	0,9724	0,7793	0,0913	0,0004	66	
	34					0,9997	0,9836	0,8371	0,1303	0,0009	65	
	35					0,9999	0,9906	0,8839	0,1795	0,0018	64	
	36					0,9999	0,9948	0,9201	0,2386	0,0033	63	
	37						0,9973	0,9470	0,3068	0,0060	62	
	38						0,9986	0,9660	0,3822	0,0105	61	
	39						0,9993	0,9790	0,4621	0,0176	60	
	40						0,9997	0,9875	0,5433	0,0284	59	
	41						0,9999	0,9928	0,6225	0,0443	58	
	42						0,9999	0,9960	0,6967	0,0666	57	
	43							0,9979	0,7635	0,0967	56	
	44							0,9989	0,8211	0,1356	55	
	45							0,9995	0,8689	0,1841	54	
	46							0,9997	0,9070	0,2421	53	
	47							0,9999	0,9362	0,3086	52	
	48							0,9999	0,9577	0,3822	51	
	49								0,9729	0,4602	50	
	50								0,9832	0,5398	49	
	51								0,9900	0,6178	48	
	52								0,9942	0,6914	47	
	53								0,9968	0,7579	46	
	54								0,9983	0,8159	45	
	55								0,9991	0,8644	44	
	56								0,9996	0,9033	43	
	57								0,9998	0,9334	42	
	58								0,9999	0,9557	41	
	59									0,9716	40	
	60									0,9824	39	
	61									0,9895	38	
	62									0,9940	37	
	63									0,9967	36	
	64									0,9982	35	
	65									0,9991	34	
	66									0,9996	33	
	67									0,9998	32	
68									0,9999	31		
n		0,98	0,95	0,9	5/6	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	k	n

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n; p; k) = 1 -$ abgelesener Wert



Name: _____

Tabelle 5: Kumulierte Binomialverteilung für $n = 200$

$$F(n; p; k) = B(n; p; 0) + \dots + B(n; p; k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \dots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n	k	p					n
		0,02	0,05	0,1	1/6	0,2	
200	0	0,0176	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	199
	1	0,0894	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	198
	2	0,2351	0,0023	0,0000	0,0000	0,0000	197
	3	0,4315	0,0090	0,0000	0,0000	0,0000	196
	4	0,6288	0,0264	0,0000	0,0000	0,0000	195
	5	0,7867	0,0623	0,0000	0,0000	0,0000	194
	6	0,8914	0,1237	0,0001	0,0000	0,0000	193
	7	0,9507	0,2133	0,0005	0,0000	0,0000	192
	8	0,9798	0,3270	0,0014	0,0000	0,0000	191
	9	0,9925	0,4547	0,0035	0,0000	0,0000	190
	10	0,9975	0,5831	0,0081	0,0000	0,0000	189
	11	0,9992	0,6998	0,0168	0,0000	0,0000	188
	12	0,9998	0,7965	0,0320	0,0000	0,0000	187
	13	0,9999	0,8701	0,0566	0,0000	0,0000	186
	14		0,9219	0,0929	0,0000	0,0000	185
	15		0,9556	0,1431	0,0001	0,0000	184
	16		0,9762	0,2075	0,0003	0,0000	183
	17		0,9879	0,2849	0,0006	0,0000	182
	18		0,9942	0,3724	0,0013	0,0000	181
	19		0,9973	0,4655	0,0027	0,0000	180
	20		0,9988	0,5592	0,0052	0,0001	179
	21		0,9995	0,6484	0,0094	0,0002	178
	22		0,9998	0,7290	0,0163	0,0005	177
	23		0,9999	0,7983	0,0269	0,0010	176
	24			0,8551	0,0426	0,0020	175
	25			0,8995	0,0648	0,0036	174
	26			0,9328	0,0945	0,0064	173
	27			0,9566	0,1329	0,0110	172
	28			0,9729	0,1803	0,0179	171
	29			0,9837	0,2366	0,0283	170
	30			0,9905	0,3007	0,0430	169
	31			0,9946	0,3711	0,0632	168
	32			0,9971	0,4454	0,0899	167
	33			0,9985	0,5210	0,1239	166
	34			0,9992	0,5953	0,1656	165
	35			0,9996	0,6658	0,2151	164
	36			0,9998	0,7305	0,2717	163
	37			0,9999	0,7877	0,3345	162
	38				0,8369	0,4019	161
	39				0,8777	0,4718	160
	40				0,9106	0,5422	159
	41				0,9362	0,6108	158
	42				0,9556	0,6758	157
	43				0,9699	0,7355	156
	44				0,9801	0,7887	155
	45				0,9872	0,8349	154
	46				0,9919	0,8738	153
	47				0,9950	0,9056	152
	48				0,9970	0,9310	151
	49				0,9983	0,9506	150
	50				0,9990	0,9655	149
	51				0,9995	0,9764	148
	52				0,9997	0,9843	147
	53				0,9998	0,9897	146
	54				0,9999	0,9934	145
	55					0,9959	144
	56					0,9975	143
	57					0,9985	142
	58					0,9991	141
	59					0,9995	140
	60					0,9997	139
	61					0,9998	138
62					0,9999	137	
		0,98	0,95	0,9	5/6	0,8	k

Nicht aufgeführte Werte sind
(auf 4 Dezimalen) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n; p; k) = 1 -$ abgelesener Wert



Name: _____

Tabelle 6: Normalverteilung

$$\phi(z) = 0, \dots$$

$$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$$\phi(2,32) = 0,9898$$

$$\phi(z) = 0,994 \Rightarrow z = 2,51$$

$$\phi(-0,9) = 1 - \phi(0,9) = 0,1841$$