

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Stochastik

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2009

1. Inhaltliche Schwerpunkte

- Wahrscheinlichkeit
- Binomialverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung

2. Medien/Materialien

- entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Muttersprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Muttersprache nicht Deutsch ist

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modellösungen

Modellösung a)

(1) Die Zufallsvariable X_1 zählt die Anzahl der Spender mit der Blutgruppe A Rh– unter 90 Spendern. X_1 ist $B_{90; 0,06}$ -verteilt:

$$P(X_1 \leq 1) = 0,94^{90} + 90 \cdot 0,94^{89} \cdot 0,06 \approx 0,0257.$$

(2) Die Zufallsvariable X_2 zählt die Anzahl der Spender mit der Blutgruppe AB unter 100 Spendern. X_2 ist $B_{100; 0,05}$ -verteilt:

$$P(5 \leq X_2) = 1 - P(X_2 \leq 4) \approx 0,564.$$

Modellösung b)

Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der Spender mit der Blutgruppe AB Rh–.

X ist binomialverteilt mit $p = 0,01$. Zu bestimmen ist n aus

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) > 0,99$$

$$\Leftrightarrow P(X = 0) < 0,01 \Leftrightarrow 0,99^n < 0,01 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,99} \approx 458,21.$$

Man benötigt mindestens 459 Spender, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens einen Spender mit der Blutgruppe AB Rh– zu erhalten.

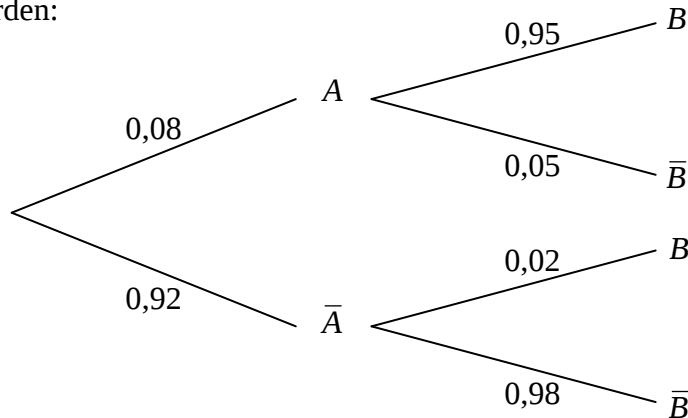
Modelllösung c)

Betrachtet werden die Ereignisse:

A: Ein Spender hat Diabetes.

B: Ein Spender wird als Diabetiker eingestuft.

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse E_1 und E_2 kann ein Baumdiagramm erstellt werden:



Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_1 , dass ein Spender nicht als Diabetiker eingestuft wird, ist:

$$P(E_1) = P(\bar{B}) = 0,08 \cdot 0,05 + 0,92 \cdot 0,98 = 0,9056 \approx 91 \%$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_2 , dass ein als Diabetiker eingestuft Spender nicht an Diabetes erkrankt, ist:

$$P(E_2) = P_B(\bar{A}) = \frac{0,92 \cdot 0,02}{0,0944} = 0,1949 \approx 19 \%$$

$P(E_2)$ kann auch durch ein „umgekehrtes“ Baumdiagramm ermittelt werden.

Modelllösung d)

Die Zufallsgröße X (Anzahl der Päckchen, die Trüffel enthalten) ist binomial verteilt mit $n = 20$. Zu bestimmen ist der Anteil p aus

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \geq 0,90 &\Leftrightarrow 1 - (1 - p)^{20} \geq 0,90 &\Leftrightarrow (1 - p)^{20} \leq 0,10 \\ &\Leftrightarrow 1 - p \leq \sqrt[20]{0,10} &\Leftrightarrow p \geq 1 - \sqrt[20]{0,10} \approx 0,1087. \end{aligned}$$

Der Anteil der Trüffel muss mindestens etwa 11 % betragen.

Modelllösung e)

Die Zufallsgröße X bezeichne hier die Anzahl der Personen mit Blutgruppe „0“ in der Stichprobe. X ist $B_{n,0,41}$ -verteilt mit unbekanntem n ; $\mu_X = 0,41n$ und $\sigma_X = 0,4918\sqrt{n}$.

Zu bestimmen ist der Umfang n der Stichprobe, so dass

$$P(X \geq 100) \geq 0,95 \Leftrightarrow P(X \leq 99) \leq 0,05.$$

Nach der σ -Tabelle ist das der Fall, wenn

$$99 \leq \mu_X - 1,64 \sigma_X$$

$$\Rightarrow 99 \leq 0,41n - 0,8066\sqrt{n}$$

$$(k := \sqrt{n}) \Rightarrow 0,41k^2 - 0,8066k - 99 \geq 0$$

$$\Rightarrow k \geq 16,5538 \text{ (oder } k \leq -14,5855)$$

$$\Rightarrow n \geq 274,03.$$

Die Stichprobe muss also mindestens 275 Personen umfassen.

6.2 Teilleistungen – Kriterien**Teilaufgabe a)**

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB) ¹
Der Prüfling		
1	(1) berechnet $P(X_1 \leq 1)$.	4 (I)
2	(2) berechnet $P(5 \leq X_2)$.	4 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
Der Prüfling		
1	bestimmt einen geeigneten Lösungsansatz zur Berechnung von n .	4 (II)
2	berechnet die Anzahl der Spender.	4 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

¹ AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	zeichnet ein Baumdiagramm.	4 (I)
2	bestimmt die totale Wahrscheinlichkeit $P(E_1)$.	4 (II)
3	bestimmt die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(E_2)$.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	bestimmt einen geeigneten Lösungsansatz zur Berechnung von p .	5 (II)
2	berechnet den Anteil der begehrten Päckchen.	5 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	bestimmt einen geeigneten Lösungsansatz zur Berechnung von n .	4 (III)
2	berechnet die Lösungen der quadratischen (Un-)Gleichung.	6 (II)
3	bestimmt die Mindestzahl n der Personen.	2 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: _____ Kursbezeichnung: _____

Schule: _____

Teilaufgabe a)

Anforderungen		Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK ²	ZK	DK
1	(1) berechnet $P(X_1 \leq 1)$.	4 (I)			
2	(2) berechnet $P(5 \leq X_2)$.	4 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (8)					
Summe Teilaufgabe a)		8			

Teilaufgabe b)

Anforderungen		Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	bestimmt einen geeigneten ...	4 (II)			
2	berechnet die Anzahl ...	4 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (8)					
Summe Teilaufgabe b)		8			

Teilaufgabe c)

Anforderungen		Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	zeichnet ein Baumdiagramm.	4 (I)			
2	bestimmt die totale ...	4 (II)			
3	bestimmt die bedingte ...	4 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (12)					
Summe Teilaufgabe c)		12			

² EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe d)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	bestimmt einen geeigneten ...	5 (II)			
2	berechnet den Anteil ...	5 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (10)					
Summe Teilaufgabe d)		10			

Teilaufgabe e)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	bestimmt einen geeigneten ...	4 (III)			
2	berechnet die Lösungen ...	6 (II)			
3	bestimmt die Mindestzahl ...	2 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (12)					
Summe Teilaufgabe e)		12			

Summe insgesamt	50			
------------------------	-----------	--	--	--

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	50			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	50			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	100			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 17 Abs. 5 APO-WbK				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsommen aus EK und ZK: _____

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _____ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0