

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Stochastik mit Alternative 1 (ein- und zweiseitiger Hypothesentest)

2. Aufgabenstellung¹

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2012

1. Inhaltliche Schwerpunkte

- Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
 - Binomialverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung
- Alternative 1:
- Ein- und zweiseitiger Hypothesentest

2. Medien/Materialien

- entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

¹ Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der Personen, die ein Smartphone besitzen.

X sei binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = \frac{1}{6}$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt:

$$P(X = 15) = \binom{100}{15} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{15} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{85} \approx 0,1002 \quad [\approx 0,3877 - 0,2874 = 0,1003 \text{ bei}$$

Verwendung der Tabelle].

Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der Personen, die ein Smartphone besitzen.

X sei binomialverteilt mit $n = 200$ und $p = \frac{1}{6}$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt:

$$P(X \geq 25) = 1 - P(X \leq 24) = 1 - \sum_{k=0}^{24} \binom{200}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{200-k} \\ \approx 0,9574.$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_3 beträgt:

$$P(32 \leq X \leq 38) = P(X \leq 38) - P(X \leq 31) \stackrel{\text{Tabelle}}{\approx} 0,8369 - 0,3711 = 0,4658.$$

Modelllösung b)

(1) $P(\text{"Zwei defekte nacheinander"}) = 0,04^2 = 0,0016.$

(2) Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der fehlerhaften Smartphones.

X sei binomialverteilt mit den Parametern n und $p = 0,04$. Es soll gelten:

$$P(X \geq 1) \geq 0,99 \Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0,99 \Leftrightarrow 0,96^n \leq 0,01$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,96)} \approx 112,81.$$

Es müssen also mindestens 113 Smartphones entnommen werden.

Modelllösung c)

Bestimme zunächst die $1-\sigma$ -Umgebungen zu $p = 0,02$ und $p = 0,04$:

$p = 0,02$: Die Standardabweichung beträgt $\sigma_1 = \sqrt{200 \cdot 0,02 \cdot 0,98} \approx 1,98$,

der Erwartungswert $\mu_1 = 200 \cdot 0,02 = 4$:

$$I_{0,02} \approx [4 - 1 \cdot 1,98; 4 + 1 \cdot 1,98] = [2,02; 5,98].$$

$p = 0,04$: Die Standardabweichung beträgt $\sigma_2 = \sqrt{200 \cdot 0,04 \cdot 0,96} \approx 2,77$,

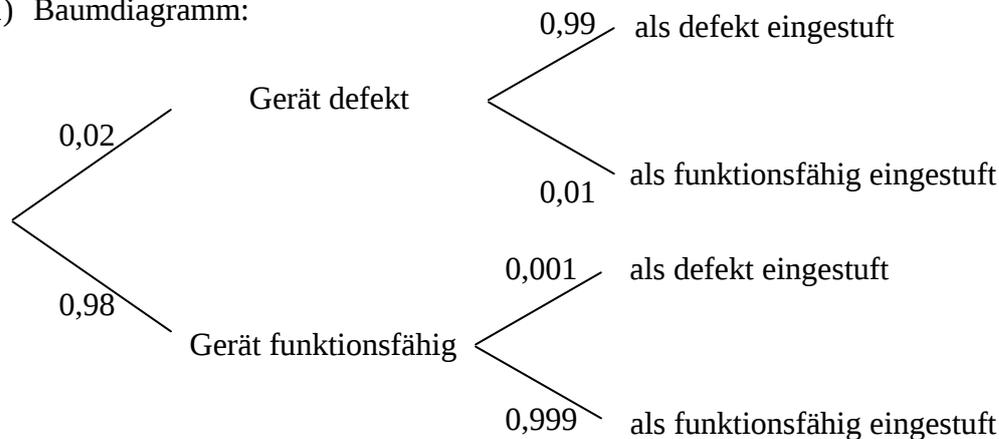
der Erwartungswert $\mu_2 = 200 \cdot 0,04 = 8$:

$$I_{0,04} \approx [8 - 1 \cdot 2,77; 8 + 1 \cdot 2,77] = [5,23; 10,77].$$

Der Wert 6 liegt im Intervall $I_{0,04}$, nicht jedoch in $I_{0,02}$. Die Abweichung zwischen dem Erwartungswert μ_1 und der Anzahl der defekten Smartphones liegt also nur für $p = 0,04$ im Bereich der einfachen Standardabweichung. Es ist also wahrscheinlicher, dass die Stichprobe aus der Produktion der schlechteren Qualität (4 %) stammt.

Modelllösung d)

(1) Baumdiagramm:



(2) $P(\text{als defekt eingestuft}) = 0,02 \cdot 0,99 + 0,98 \cdot 0,001 = 0,02078$

(3) $P_{\text{als defekt eingestuft}}(\text{nicht defekt}) = \frac{0,98 \cdot 0,001}{0,02 \cdot 0,99 + 0,98 \cdot 0,001} \approx 0,047$

[Alternativ ist auch eine Lösung durch Umdrehen des Baumdiagramms möglich.]

Modelllösung e)

- (1) Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der defekten Smartphones in der Stichprobe an. Dann kann X als binomialverteilt angenommen werden mit Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0,01$ und Stichprobenanzahl $n = 1000$.

Der Erwartungswert von X beträgt $\mu = 1000 \cdot 0,01 = 10$, die Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{1000 \cdot 0,01 \cdot 0,99} \approx 3,146 > 3.$$

Also ist die Laplace-Bedingung erfüllt und es gilt näherungsweise:

$$P_{H_0}(X \leq \mu + 1,64 \cdot \sigma) \geq 0,95 \text{ und es ist } \mu + 1,64 \cdot \sigma \approx 15,16.$$

Als Entscheidungsregel erhält man:

Die Hypothese H_0 wird genau dann abgelehnt, wenn $X \geq 16$ ist, ansonsten wird die Hypothese beibehalten.

- (2) Fehler 1. Art: Die Hypothese des Herstellers $p \leq 0,01$ ist wahr, wird aber aufgrund einer zufällig hohen Anzahl defekter Smartphones fälschlicherweise verworfen.
Fehler 2. Art: Die Hypothese (das Versprechen) des Herstellers ist falsch, sie wird aber aufgrund einer zufällig geringen Anzahl defekter Smartphones in der Stichprobe nicht abgelehnt.

6.2 Teilleistungen – Kriterien**Teilaufgabe a)**

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
Der Prüfling		
1	berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass genau 15 Handy-Besitzer ein Smartphone haben.	2
2	berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 25 Handy-Besitzer ein Smartphone besitzen.	3
3	berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 32 und höchstens 38 Handy-Besitzer ein Smartphone besitzen.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	(1) berechnet die Wahrscheinlichkeit, zweimal nacheinander ein defektes Smartphone zu erhalten.	2
2	(2) bestimmt einen Ansatz zur Ermittlung des gesuchten Stichprobenumfangs.	3
3	(2) berechnet das gesuchte n .	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	berechnet Standardabweichung und Erwartungswert für $p = 0,02$.	3
2	berechnet Standardabweichung und Erwartungswert für $p = 0,04$.	3
3	entscheidet aufgrund der Ergebnisse.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	(1) stellt die Situation mit Hilfe eines vollständigen Baumdiagramms dar.	6
2	(2) bestimmt $P(\text{als defekt eingestuft})$.	3
3	(3) bestimmt die gesuchte Wahrscheinlichkeit.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl
	Der Prüfling	
1	(1) ermittelt eine Entscheidungsregel.	5
2	(2) beschreibt die Fehler 1. und 2. Art im Sachzusammenhang.	6
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: _____ Kursbezeichnung: _____

Schule: _____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK ²	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	berechnet die Wahrscheinlichkeit ...	2			
2	berechnet die Wahrscheinlichkeit ...	3			
3	berechnet die Wahrscheinlichkeit ...	4			
sachlich richtige Alternativen: (9)					
	Summe Teilaufgabe a)	9			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	(1) berechnet die Wahrscheinlichkeit ...	2			
2	(2) bestimmt einen Ansatz ...	3			
3	(2) berechnet das gesuchte ...	3			
sachlich richtige Alternativen: (8)					
	Summe Teilaufgabe b)	8			

² EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	berechnet Standardabweichung und ...	3			
2	berechnet Standardabweichung und ...	3			
3	entscheidet aufgrund der ...	4			
sachlich richtige Alternativen: (10)					
Summe Teilaufgabe c)		10			

Teilaufgabe d)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) stellt die Situation ...	6			
2	(2) bestimmt P (als defekt eingestuft) .	3			
3	(3) bestimmt die gesuchte ...	3			
sachlich richtige Alternativen: (12)					
Summe Teilaufgabe d)		12			

Teilaufgabe e)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	(1) ermittelt eine Entscheidungsregel.	5			
2	(2) beschreibt die Fehler ...	6			
sachlich richtige Alternativen: (11)					
Summe Teilaufgabe e)		11			

Summe insgesamt		50			
------------------------	--	-----------	--	--	--

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktzahl aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	50			
Übertrag der Punktzahl aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	50			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	100			
aus der Punktzahl resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOST				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktzahlen aus EK und ZK: _____

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _____ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0