Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2010

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie mit Alternative 2 (Übergangsmatrizen)

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2010

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

   Alternative 2:
   - Übergangsmatrizen, Matrizenmultiplikation als Verkettung von Übergängen

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

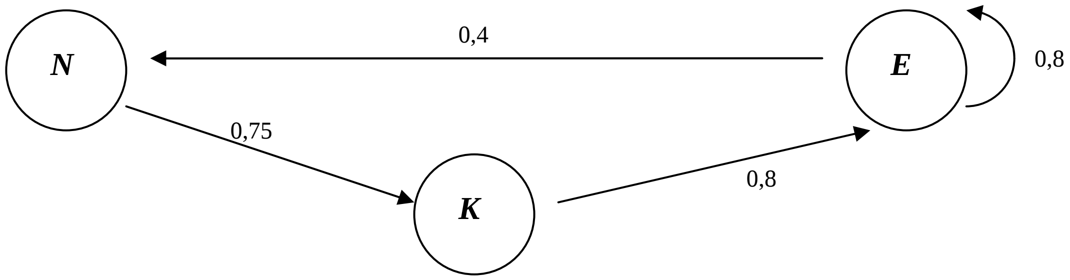
5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)



Das Matrixelement $a_{13} = 0{,}4$ („von E nach N“) gibt die Geburtenrate in der Rinderherde an, d. h., 40 % der erwachsenen Tiere bekommen innerhalb eines Jahres Nachwuchs.
Das Matrixelement $a_{33} = 0{,}8$ („von E nach E“) gibt den Anteil der in der Herde verbleibenden erwachsenen Tiere an, d. h., 80 % der erwachsenen Tiere bleiben in der Herde.

Es erreichen $0{,}75 \cdot 0{,}8 = 0{,}6 = 60\,\%$ der Neugeborenen das Erwachsenenstadium.

Modelllösung b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}75 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 200 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}75 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 30 \\ 184 \end{pmatrix}$$

Damit sind es im nächsten Jahr 40 neugeborene Tiere, 30 Kälber und 200 erwachsene Tiere, im darauffolgenden Jahr sind es entsprechend 80, 30 und 184.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}75 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 25 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Damit waren im vergangenen Jahr 200 neugeborene Tiere, 25 Kälber und 100 erwachsene Tiere in der Herde.

Modelllösung c)

Fixpunktansatz: $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}75 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} -x + 0{,}4z = 0 \\ 0{,}75x - y = 0 \\ 0{,}8y - 0{,}2z = 0 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{matrix} -x + 0{,}4z = 0 \\ 0{,}75x - 0{,}25z = 0 \\ 0{,}8y - 0{,}2z = 0 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad x = y = z = 0$$

Damit wiederholt sich die Verteilung in der Rinderherde nur dann, wenn es keine Rinderherde gibt.

$\Rightarrow$ Es gibt keine Verteilung auf die Altersstufen in der Rinderherde, die sich im Folgejahr wiederholt.

Modelllösung d)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}75 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 30 \\ 176 \end{pmatrix}$$

[Alternative: Zweimalige Multiplikation „Matrix / Vektor“]

Damit erhält man nach einem Krankheits- und einem normalen Jahr eine Verteilung von 80 Neugeborenen, 30 Kälbern und 176 erwachsenen Rindern in der Herde.

Modelllösung e)

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,32 & 0,32 \\ 0 & 0 & 0,3 \\ 0,4 & 0,64 & 0,64 \end{pmatrix}$$

Man erhält beispielsweise das Element $c_{13} = 0,32$ in $C = A \cdot B$ als Produktsumme der 1. Zeile von *A* mit der 3. Spalte von *B*.

[Alternative Formulierungen sind hier vorstellbar.]

C enthält die Übergangsquoten nach einem Krankheits- und einem normalen Jahr.

Zur rechnerischen Begründung der Relevanz, ob die Krankheit im ersten oder im zweiten Jahr auftritt, bietet sich eine Verwendung der Matrix $D = B \cdot A$ an.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,4 \\ 0,75 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,32 & 0,32 \\ 0 & 0 & 0,2 \\ 0,6 & 0,64 & 0,64 \end{pmatrix}$$

Berechnung der neuen Verteilung:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0,32 & 0,32 \\ 0 & 0 & 0,2 \\ 0,6 & 0,64 & 0,64 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 150 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 20 \\ 184 \end{pmatrix}$$

Die Reihenfolge hat einen Einfluss auf die Anzahl der einjährigen Kälber und der erwachsenen Rinder.

[**Lösungsalternative:** Anwendung der Matrizen *A* und *B* nacheinander auf einen Verteilungsvektor in unterschiedlicher Reihenfolge]

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	stellt die Entwicklung in der Herde durch einen Übergangsgraphen dar.	3 (I)
2	beschreibt die biologische Bedeutung von a_{13}.	3 (II)
3	bestimmt den Anteil der erwachsenen Tiere, die in der Herde verbleiben.	3 (II)
4	bestimmt den Anteil der Neugeborenen, die das Erwachsenenstadium erreichen.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	berechnet die Verteilung für das nächste Jahr.	3 (I)
2	berechnet die Verteilung für das übernächste Jahr.	3 (I)
3	bestimmt die Verteilung für das vergangene Jahr.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	untersucht anhand eines Fixpunktansatzes.	3 (II)
2	bestimmt die eindeutige Lösung des entstandenen LGS.	4 (II)
3	erklärt, dass es keine Verteilung gibt, die sich im Folgejahr wiederholt.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

1 AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	berechnet die Verteilung nach einem Krankheits- und einem normalen Jahr.	6 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	bestimmt $C = A \cdot B$.	3 (II)
2	beschreibt, wie man an die Matrixelemente von C kommt.	3 (II)
3	interpretiert die Komponenten von C im Sachzusammenhang.	3 (III)
4	begründet anhand von $D = B \cdot A$ (oder anhand einer Alternative), dass es relevant ist, ob die Krankheit im 1. oder im 2. Jahr auftritt.	3 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	stellt die Entwicklung …	3 (I)			
2	beschreibt die biologische …	3 (II)			
3	bestimmt den Anteil …	3 (II)			
4	bestimmt den Anteil …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (12) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**12**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet die Verteilung …	3 (I)			
2	berechnet die Verteilung …	3 (I)			
3	bestimmt die Verteilung …	4 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (10) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**10**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	untersucht anhand eines …	3 (II)			
2	bestimmt die eindeutige …	4 (II)			
3	erklärt, dass es …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (10) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**10**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet die Verteilung …	6 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (6) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**6**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	bestimmt $C = A \cdot B$.	3 (II)			
2	beschreibt, wie man …	3 (II)			
3	interpretiert die Komponenten …	3 (III)			
4	begründet anhand von …	3 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (12) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**12**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0