

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie mit Alternative 1

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2009

1. Inhaltliche Schwerpunkte

- Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

Alternative 1:

- Geraden- und Ebenengleichungen in Parameterform und Koordinatenform, Lagebeziehung von Geraden und Ebenen
- Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität und Länge von Vektoren

2. Medien/Materialien

- entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Muttersprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Muttersprache nicht Deutsch ist

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modellösungen

Modelllösung a)

(1) Mitte von \overline{SB} : $M_{SB}(1,5|1,5|10)$; Mitte von \overline{SD} : $M_{SD}(-1,5|-1,5|10)$

Als Parametergleichung von E_1 ergibt sich: $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4,5 \\ 1,5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1,5 \\ 4,5 \\ -3 \end{pmatrix}$

(2) Als Geradengleichung ergibt sich: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

(3) E_1 und g schneiden sich rechtwinklig, da gilt:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4,5 \\ 1,5 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1,5 \\ 4,5 \\ -3 \end{pmatrix} = 0.$$

Für die Koordinatenform von E_1 ergibt sich: $E_1: 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 60 = 0$.

Modelllösung b)

(1) Da $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{CD}| = |\overline{AD}| = 6$, ist ABCD eine Raute. Da außerdem

\overline{AB} senkrecht zu \overline{BC} (rechnerisch: $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 0$), ist ABCD ein Quadrat und damit ist ABCDS eine quadratische Pyramide.

Volumen der Pyramide: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$; aus $G = |\overline{AB}| \cdot |\overline{BC}| = 36$ und $h = |\overline{M_{ABCD}S}| = 6$

ergibt sich für das Volumen der Pyramide $V = 72$ VE.

(2) Da die Spitze S der Pyramide senkrecht über der Mitte M_{ABCD} des Quadrates ABCD liegt, besteht die Mantelfläche der Pyramide aus vier deckungsgleichen Dreiecken.

Mit $M_{AB}(3|0|7)$ beträgt der Flächeninhalt A_D einer Seitenfläche der Pyramide

$$A_D = \frac{1}{2} \cdot |\overline{M_{AB}S}| \cdot |\overline{AB}| = 9 \cdot \sqrt{5}.$$

Für die gesamte Mantelfläche der Pyramide ergibt sich ein Flächeninhalt von

$$A_{\text{Mantel}} = 4 \cdot A_D = 36 \cdot \sqrt{5} \approx 80,50 \text{ (FE)}.$$

Modelllösung c)

(1) Aus der Parametergleichung $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ ergibt sich eine Koordinaten-

form der Ebenengleichung von $E_2: 2x_2 + x_3 - 13 = 0$.

Durch Punktprobe in die Koordinatenform der Ebenengleichung für E_2 erfolgt der Nachweis, dass die Punkte F_1, F_2 und F_3 in der Ebene E_2 liegen.

(2) Es handelt sich um ein gleichschenkliges Dreieck, da $|\overrightarrow{F_1F_3}| = |\overrightarrow{F_1F_2}| = \sqrt{6}$.

Modelllösung d)

(1) Durch Einsetzen der Geradengleichung von h in die Koordinatengleichung von E_2

ergibt sich der Durchstoßpunkt $L(\frac{4}{3} | \frac{4}{3} | \frac{31}{3})$, denn aus $2(5 + 11t) + (15 + 14t) - 13 = 0$

folgt $t = -\frac{1}{3}$.

(2) Durch Gleichsetzen der Koordinaten von L mit der Geradengleichung der Seitenkante

\overline{BS} des Dreiecks BCS $\begin{pmatrix} 1\frac{1}{3} \\ 1\frac{1}{3} \\ 10\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ folgt für den Parameter $s = \frac{5}{9}$.

Wegen $0 \leq s \leq 1$ liegt der Punkt L auf der Seitenkante \overline{BS} .

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB) ¹
	Der Prüfling	
1	berechnet eine Ebenengleichung für die Ebene E_1 in Parameterform (unter Benutzung der Seitenmitten der beiden Pyramidenkanten).	4 (I)
2	gibt eine Gleichung für die Gerade g an.	2 (I)
3	zeigt, dass sich g und E_1 rechtwinklig schneiden.	2 (II)
4	ermittelt eine Gleichung für Ebene E_1 in Koordinatenform (mit bekanntem Normalenvektor).	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	zeigt, dass die Pyramide quadratisch ist.	4 (II)
2	berechnet das Volumen der Pyramide.	4 (I)
3	bestimmt den Flächeninhalt der Mantelfläche der Pyramide.	6 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	berechnet eine Ebenengleichung für Ebene E_2 in Koordinatenform.	7 (I)
2	zeigt, dass die Punkte F_1 , F_2 und F_3 in der Ebene E_2 liegen.	3 (II)
3	zeigt, dass das Dreieck $F_1F_2F_3$ gleichschenkelig ist.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

¹ AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	bestimmt die Koordinaten des Punktes L in der Ebene E_2 .	5 (II)
2	weist nach, dass der Punkt L auf der Seitenkante \overline{BS} des Dreiecks BCS liegt.	6 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: _____ Kursbezeichnung: _____

Schule: _____

Teilaufgabe a)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK ²	ZK	DK
1	berechnet eine Ebenengleichung ...	4 (I)			
2	gibt eine Gleichung ...	2 (I)			
3	zeigt, dass sich ...	2 (II)			
4	ermittelt eine Gleichung ...	4 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (12)					
Summe Teilaufgabe a)		12			

Teilaufgabe b)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	zeigt, dass die ...	4 (II)			
2	berechnet das Volumen ...	4 (I)			
3	bestimmt den Flächeninhalt ...	6 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (14)					
Summe Teilaufgabe b)		14			

² EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	berechnet eine Ebenengleichung ...	7 (I)			
2	zeigt, dass die ...	3 (II)			
3	zeigt, dass das ...	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (13)					
	Summe Teilaufgabe c)	13			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
	Der Prüfling				
1	bestimmt die Koordinaten ...	5 (II)			
2	weist nach, dass ...	6 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (11)					
	Summe Teilaufgabe d)	11			

	Summe insgesamt	50			
--	------------------------	-----------	--	--	--

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktzahl aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	50			
Übertrag der Punktzahl aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	50			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	100			
aus der Punktzahl resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 17 Abs. 5 APO-WbK				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsommen aus EK und ZK: _____

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _____ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0