Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2010

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie ohne Alternative

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2010

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
   - Geraden- und Ebenengleichungen in Parameterform und Koordinatenform, Lagebeziehung von Geraden und Ebenen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität und Länge von Vektoren

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Breite der Schachtel: $b = \left|\overrightarrow{AB}\right| = 8\text{ cm}$.

Höhe der Schachtel: $h = \left|\overrightarrow{DH}\right| = 5\text{ cm}$.

(2) Mögliche Parametergleichung von E_{EGH}:

$$\vec{x} = \overrightarrow{DE} + r \cdot \overrightarrow{EG} + s \cdot \overrightarrow{EH} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ r, s \in \mathbb{R}.$$

Hieraus ergibt sich $\left| \begin{array}{ll} x_1 = & 4 - 4r - 4s \\ x_2 = & 4r \\ x_3 = & 4 + s \end{array} \right|$, $\left| \begin{array}{ll} x_1 = & 4 - x_2 - 4 \cdot (x_3 - 4) \\ r = & x_2 / 4 \\ s = & x_3 - 4 \end{array} \right|$ und schließlich

$E_{\text{EGH}}:\ x_1 + x_2 + 4 \cdot x_3 = 20$.

(3) F ist der Schnittpunkt der Ebene E_{EGH} mit der Geraden g durch S und B.

Es gilt $g:\ \vec{x} = \overrightarrow{DS} + k \cdot \overrightarrow{SB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix},\ k \in \mathbb{R}$.

Einsetzen der „rechten Seite“ in die Koordinatengleichung von E_{EGH} führt auf die

Gleichung $8k + 8k + 4 \cdot (8 - 8k) = 20$ mit der Lösung $k = \frac{3}{4}$.

Einsetzen von k in die Parametergleichung von g ergibt $F(6\,|\,6\,|\,2)$.

(4) Der Spannvektor $\overrightarrow{EH} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Ebene E_{EGH} liegt nicht in der x_1-x_2-Ebene. Daher ist

E_{EGH} nicht parallel zur x_1-x_2-Ebene, somit auch die Deckfläche der Schachtel nicht parallel zu ihrer Grundfläche.

Modelllösung b)

(1) Das Skalarprodukt der Diagonalenvektoren $\overrightarrow{EG}$ und $\overrightarrow{HF}$ ist Null:

$\overrightarrow{EG}\cdot\overrightarrow{HF}=\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\6\\-3\end{pmatrix}=0$. Die Diagonalen sind somit orthogonal.

(2) $|\overrightarrow{EG}|=\left|\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}\right|=4\cdot\sqrt{2}\approx 5{,}7$ [cm], $|\overrightarrow{HF}|=\left|\begin{pmatrix}6\\6\\-3\end{pmatrix}\right|=\sqrt{36+36+9}=9$ [cm].

Der Schnittpunkt V der Diagonalen $\overline{EG}$ und $\overline{HF}$ muss wie die Punkte E und G die x_3-Koordinate 4 haben: $V=(v_1\,|\,v_2\,|\,4)$. Aus dem Ansatz

$\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\4\end{pmatrix}=\overrightarrow{DH}+r\cdot\overrightarrow{HF}=\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}6\\6\\-3\end{pmatrix}$ ergibt sich sofort $r=\frac{1}{3}$ sowie $v_1=v_2=2$.

Der Schnittpunkt der Diagonalen ist $V(2\,|\,2\,|\,4)$.

(3) Die Diagonalen sind gemäß (1) orthogonal. Für den Flächeninhalt der Deckfläche gilt:

$A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{EG}|\cdot|\overrightarrow{HV}|+\frac{1}{2}|\overrightarrow{EG}|\cdot|\overrightarrow{VF}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{EG}|\cdot|\overrightarrow{HF}|=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 9=18\sqrt{2}\approx 25{,}5$ [cm^2].

[Da außerdem V der Mittelpunkt der Strecke $\overline{EG}$ ist, handelt es sich bei dem Viereck *EFGH* um ein Drachenviereck.]

Modelllösung c)

(1) $F'(4|4|4)$ und $H'(0|0|4)$ erfüllen wie auch $E(4|0|4)$ und $G(0|4|4)$ offensichtlich die Gleichung der Ebene $E': x_3 = 4$.

$F'(4|4|4)$ halbiert die Strecke $\overline{SB}$, liegt also auf $\overline{SB}$.

$H'(0|0|4)$ halbiert die Strecke $\overline{DS}$, liegt also auf $\overline{DS}$.

Somit sind $F'(4|4|4)$ und $H'(0|0|4)$ neben $E(4|0|4)$ und $G(0|4|4)$ Eckpunkte der neuen Deckfläche.

(2) Es gilt $|\overrightarrow{EF'}| = |\overrightarrow{F'G}| = |\overrightarrow{GH'}| = |\overrightarrow{H'E}| = 4$ und benachbarte Seiten sind orthogonal. Die neue Deckfläche ist also ein Quadrat.

(3) Der Anschauung entnimmt man: Damit durch den Schnitt einer Ebene mit der Pyramide *ABCDS* eine Schachtel mit quadratischer Deckfläche entsteht, muss diese Ebene parallel zur x_1-x_2-Ebene sein. Ihre Schnittfläche mit der Pyramide muss mehr als einen Punkt enthalten und darf nicht die Grundfläche der Pyramide sein.

[Diese Bedingungen sind genau dann erfüllt, wenn die Ebene die Gleichung $x_3 = a$ mit $0 < a < 8$ hat.]

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	(1) gibt Breite und Höhe der Schachtel an.	2 (I)
2	(2) gibt eine Parametergleichung von E_{EGH} an.	4 (I)
3	(2) bestimmt eine Koordinatengleichung von E_{EGH}.	3 (II)
4	(3) bestimmt die Koordinaten des Punktes *F*.	6 (II)
5	(4) prüft, ob die Deckfläche der Schachtel parallel zu ihrer Grundfläche ist.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	(1) zeigt, dass die Diagonalen orthogonal sind.	4 (II)
2	(2) berechnet die Länge der beiden Diagonalen.	4 (I)
3	(2) bestimmt die Koordinaten ihres Schnittpunktes *V*.	5 (II)
4	(3) berechnet den Flächeninhalt der Deckfläche.	4 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	(1) weist nach, dass die Punkte $F'(4 \mid 4 \mid 4)$ und $H'(0 \mid 0 \mid 4)$ sowie die schon bekannten Punkte $E(4 \mid 0 \mid 4)$ und $G(0 \mid 4 \mid 4)$ Eckpunkte der neuen Deckfläche sind.	5 (II)
2	(2) untersucht, welche Form die neue Deckfläche (Viereck *EF'GH'*) hat.	5 (II)
3	(3) ermittelt mit Hilfe der Anschauung, welche Bedingungen eine Ebene erfüllen muss, damit durch den Schnitt dieser Ebene mit der Pyramide *ABDCS* eine Schachtel mit quadratischer Deckfläche entsteht.	5 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt Breite und …	2 (I)			
2	(2) gibt eine Parametergleichung …	4 (I)			
3	(2) bestimmt eine Koordinatengleichung …	3 (II)			
4	(3) bestimmt die Koordinaten …	6 (II)			
5	(4) prüft, ob die …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (18) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**18**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass die …	4 (II)			
2	(2) berechnet die Länge …	4 (I)			
3	(2) bestimmt die Koordinaten …	5 (II)			
4	(3) berechnet den Flächeninhalt …	4 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (17) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**17**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) weist nach, dass …	5 (II)			
2	(2) untersucht, welche Form …	5 (II)			
3	(3) ermittelt mit Hilfe …	5 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (15) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**15**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0