Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie ohne Alternative

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2011

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
   - Geraden- und Ebenengleichungen in Parameterform und Koordinatenform, Lagebeziehung von Geraden und Ebenen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität und Länge von Vektoren

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Es gilt: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$ [LE].

$\Rightarrow$ Das Dreieck ABC ist gleichseitig.

(2) Die Vektoren $\overrightarrow{AB} = 12 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = 12 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängige Richtungsvektoren der Ebene E_{ABC}. Eine Parametergleichung ist

$$E_{\text{ABC}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; r, s \in \mathbb{R}.$$

Eliminierung der Parameter:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{lcrrr} x_1 & = & 9 & -r & \\ x_2 & = & -4 & +r & -s \\ x_3 & = & -2 & & +s \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{lcrrr} x_1 & = & 9 & -r & \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 3 & & \\ x_3 & = & -2 & & +s \end{array} \right|$$

Koordinatenform: $E_{\text{ABC}}: \; x_1 + x_2 + x_3 = 3$.

Modelllösung b)

Es gilt: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$ bzw. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; r \in \mathbb{R}$.

$S \in E_{\text{ABC}}$, da 1 + 0 + 2 = 3 gilt.

$S \in g$, da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ wahr ist für $r = -2$.

[Eine mögliche Alternative ist die Berechnung des Schnittpunktes von E_{ABC} und *g*.]

Da ein Normalenvektor von E_{ABC} identisch zu einem Richtungsvektor von *g* ist, schneidet *g* die Ebene E_{ABC} senkrecht.

Modelllösung c)

(1) In einem gleichseitigen Dreieck ist der Schwerpunkt von den Eckpunkten gleich weit entfernt. Da *g* die Ebene E_{ABC} senkrecht schneidet, ist jeder Punkt auf *g* von den Eckpunkten des Dreiecks *ABC* gleich weit entfernt (Satz des Pythagoras). Deswegen ist ein möglicher Ansatz zur Berechnung der Koordinaten des (der) gesuchten Punkte(s) *D*:

$\left|\overline{AD}\right| = \left|\overline{AB}\right|$. Mit $D = (3+r\,|\,2+r\,|\,4+r)$ erhält man

$\sqrt{(r-6)^2+(r+6)^2+(r+6)^2} = \sqrt{288} \Leftrightarrow 3r^2+12r+108 = 288 \Leftrightarrow r = 6 \vee r = -10$.

Die gesuchten Punkte sind: $D_1(9\,|\,8\,|\,10)$ $[= D]$ und $D_2(-7\,|\,-8\,|\,-6)$.

(2) Für den Abstand *d* des Punktes *D* von der Ebene E_{ABC} ergibt sich:

Da *D* auf *g* liegt und *g* die Ebene E_{ABC} senkrecht schneidet, gilt $d(D,E_{\text{ABC}}) = |\overrightarrow{DS}|$.

$$|\overrightarrow{DS}| = \left|\begin{pmatrix}-8\\-8\\-8\end{pmatrix}\right| = 8\sqrt{3} \approx 13{,}86 \text{ [LE].}$$

Für das Volumen des Tetraeders gilt: $V = \frac{1}{3}\cdot G\cdot h = \frac{1}{3}\cdot A_{\Delta\text{ABC}}\cdot d(D,E_{\text{ABC}})$.

Für den Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks *ABC* erhält man:

$$A_{\Delta\text{ABC}} = \frac{\left|\overline{AB}\right|^2}{4}\cdot\sqrt{3} = \frac{288}{4}\cdot\sqrt{3} = 72\cdot\sqrt{3}\,. \Rightarrow V = \frac{1}{3}\cdot 72\sqrt{3}\cdot 8\sqrt{3} = 576 \text{ [VE].}$$

Modelllösung d)

(1) [Die Koordinaten der Punkte M_{AD}, M_{DB}, M_{BC} und M_{CA} sind jeweils das arithmetische Mittel der Koordinaten der entsprechenden Eckpunkte des Tetraeders.]

$M_{AD}(9|2|4)$, $M_{DB}(3|8|4)$, $M_{BC}(-3|2|4)$ und $M_{CA}(3|-4|4)$

(2) Die Punkte M_{AD}, M_{DB}, M_{BC} und M_{CA} liegen alle in der Ebene mit der Gleichung $x_3 = 4$.

Es gilt: $\overrightarrow{M_{AD}M_{DB}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{M_{DB}M_{BC}} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{M_{BC}M_{CA}} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{M_{CA}M_{AD}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Wegen $\left|\overline{M_{AD}M_{DB}}\right| = \left|\overline{M_{DB}M_{BC}}\right| = \left|\overline{M_{BC}M_{CA}}\right| = \left|\overline{M_{CA}M_{AD}}\right| = 6\sqrt{2}$ [LE] ist das Viereck $M_{AD}M_{DB}M_{BC}M_{CA}$ eine Raute, wegen $\overrightarrow{M_{AD}M_{DB}} \cdot \overrightarrow{M_{DB}M_{BC}} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{M_{AD}M_{DB}} \perp \overrightarrow{M_{DB}M_{BC}}$ ein Quadrat.

(3) Der Punkt $T(3|2|4)$ ist als Mittelpunkt des Quadrates $M_{AD}M_{DB}M_{BC}M_{CA}$ zugleich der Mittelpunkt des Würfels und liegt daher [lotrecht] unter dem Mittelpunkt $M_{CD}(3|2|10)$ der Würfelseitendiagonalen $\overline{CD}$.

Deswegen ist der Abstand des Punktes T von der Tetraederkante $\overline{CD}$ gleich dem Abstand des Punktes T von deren Mittelpunkt M_{CD}: $|\overrightarrow{TM_{CD}}| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = 6$ [LE].

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) zeigt rechnerisch, dass das Dreieck *ABC* gleichseitig ist.	5
2	(2) berechnet eine Gleichung der Ebene E_{ABC} in Parameterform.	3
3	(2) berechnet eine Gleichung der Ebene E_{ABC} in Koordinatenform.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	zeigt, dass S auf der Geraden g und in der Ebene E_{ABC} liegt.	5
2	zeigt, dass g die Ebene E_{ABC} senkrecht schneidet.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) bestimmt die Punkte der Geraden g, die als vierter Eckpunkt D des regelmäßigen Tetraeders $ABCD$ in Frage kommen.	5
2	(2) berechnet den Abstand des Punktes D von der Ebene E_{ABC}.	4
3	(2) berechnet das Volumen des Tetraeders $ABCD$.	6
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) gibt die Koordinaten der Streckenmittelpunkte M_{AD}, M_{DB}, M_{BC} und M_{CA} an.	5
2	(2) zeigt, dass das Viereck $M_{\text{AD}}M_{\text{DB}}M_{\text{BC}}M_{\text{CA}}$ ein Quadrat ist.	5
3	(3) ermittelt den Abstand dieses Punktes T von der Kante $\overline{CD}$ des Tetraeders.	5
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt rechnerisch, dass …	5			
2	(2) berechnet eine Gleichung …	3			
3	(2) berechnet eine Gleichung …	3			
sachlich richtige Alternativen: (11) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**11**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	zeigt, dass S …	5			
2	zeigt, dass g …	4			
sachlich richtige Alternativen: (9) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**9**			

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die Punkte …	5			
2	(2) berechnet den Abstand …	4			
3	(2) berechnet das Volumen …	6			
sachlich richtige Alternativen: (15) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**15**			

2 EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt die Koordinaten …	5			
2	(2) zeigt, dass das …	5			
3	(3) ermittelt den Abstand …	5			
sachlich richtige Alternativen: (15) ………………………………………………………………………. ……………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe d)	**15**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ___________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: ________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0