Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2012

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Lineare Algebra/Geometrie ohne Alternative

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2012

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Lineare Gleichungssysteme für $n > 2$, Matrix-Vektor-Schreibweise, systematisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
   - Geraden- und Ebenengleichungen in Parameterform und Koordinatenform, Lagebeziehung von Geraden und Ebenen
   - Standard-Skalarprodukt mit den Anwendungen Orthogonalität und Länge von Vektoren

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

(1) Da es sich um eine gerade Pyramide mit zur x-y-Ebene parallelen Grundfläche handelt, stimmen die x- und y-Koordinaten der Pyramidenspitze S mit denen des Mittelpunkts $M(4{,}5\,|\,4{,}5\,|\,1)$ ihrer quadratischen Grundfläche $ABCD$ überein. Zur z-Koordinate von M ist die Höhe der Pyramide zu addieren, so dass sich $S(4{,}5\,|\,4{,}5\,|\,2)$ ergibt.

(2) $|\overline{AB}| = 1\,\text{m}$ wie vorausgesetzt.

Das Dreieck ABS ist gleichschenklig mit $|\overline{AS}| = |\overline{BS}| = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}5^2 + 1^2}\ \text{m} \approx 1{,}22\,\text{m}$.

(3) Das Volumen der Pyramide beträgt $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1\ \text{m}^3 = \frac{1}{3}\ \text{m}^3$.

Ihre Oberfläche besteht aus der $1\,\text{m}^2$ großen Grundfläche und der Mantelfläche.

Die Mantelfläche besteht aus vier [kongruenten] Dreiecken mit der Grundseitenlänge 1 m und der Höhe $h = \sqrt{1^2 + 0{,}5^2}\ \text{m} = \sqrt{1{,}25}\ \text{m}$. Der Inhalt jeder Dreiecksfläche beträgt somit $A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{1{,}25}\ \text{m}^2$. Der Oberflächeninhalt der Pyramide ist

$$O = 1\ \text{m}^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{1{,}25}\ \text{m}^2 \approx 3{,}24\ \text{m}^2.$$

Modelllösung b)

Die Lichtquelle befindet sich im Punkt $L(4{,}5\,|\,9\,|\,1)$.

Offenbar wird nur die Pyramidenfläche BCS von den Lichtstrahlen getroffen.

Daher sind die Schnittpunkte B', C' und S' der Geraden LB, LC und LS mit der x-z-Ebene ($y = 0$) die Eckpunkte des Schattendreiecks $B'C'S'$:

$LB: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ schneidet für $t = \frac{9}{4}$ die x-z-Ebene in $B'(5{,}625\,|\,0\,|\,1)$.

$LC: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ schneidet für $u = \frac{9}{4}$ die x-z-Ebene in $C'(3{,}375\,|\,0\,|\,1)$.

$LS\ : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4,5 \\ 1 \end{pmatrix}$ schneidet für $v = 2$ die *x*-*z*-Ebene in $S'(4,5\,|\,0\,|\,3)$.

Das Dreieck $B'C'S'$ ist wegen $|\overline{B'S'}| = \sqrt{1,125^2 + 2^2}\ \text{m} = |\overline{C'S'}|$ gleichschenklig.

Es hat die Grundseitenlänge $|\overline{B'C'}| = 2,25\ \text{m}$ und die Höhe 2 m. Sein Flächeninhalt beträgt daher $2,25\ \text{m}^2$.

Modelllösung c)

(1) Die Seitenhalbierende der Dreiecksseite $\overline{AB}$ ist die Strecke $\overline{SM_{AB}}$, wobei $M_{AB}(5\,|\,4,5\,|\,1)$ der Mittelpunkt von $\overline{AB}$ ist. Der Mittelpunkt der Strecke $\overrightarrow{SM_{AB}}$ ist $M\left(\frac{4,5+5}{2}\middle|\frac{4,5+4,5}{2}\middle|\frac{2+1}{2}\right) = M(4,75\,|\,4,5\,|\,1,5).$ Damit ist gezeigt, dass *M* Mittelpunkt der Seitenhalbierenden der Dreiecksseite $\overline{AB}$ ist.

(2) Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist wegen $\vec{v} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\vec{v} \cdot \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,5 \\ -0,5 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ orthogonal zu den beiden Seitenvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AS}$ und somit orthogonal zur Dreiecksfläche *ABS*. Daher verläuft der Laserstrahl in Richtung des Vektors $\vec{v}$.

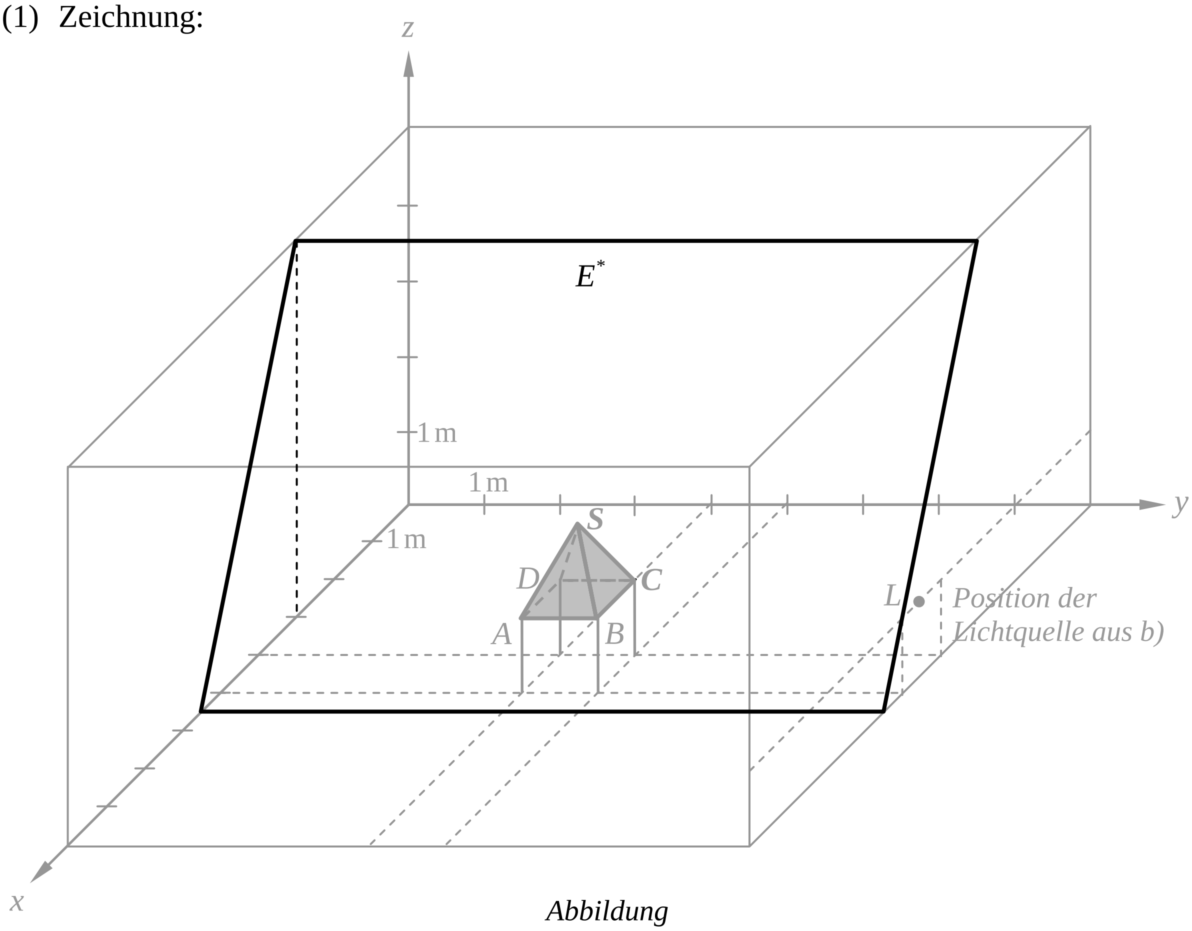
Der Laserstrahl verläuft entlang der Geraden $l\ : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4,75 \\ 4,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ parallel zur *x*-*z*-Ebene. Offenbar befindet sich die gesuchte Position *P* der Laser-Lichtquelle an der vorderen Hallenwand (vgl. *Abbildung*). Daher gilt für die *x*-Koordinate von *P*: $x_P = 9$.

Aus $\vec{x}_P = \begin{pmatrix} 9 \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,75 \\ 4,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt sich $r = 2,125$ und $z_P = 3,625$.

$P(9\,|\,4,5\,|\,3,625)$ ist die gesuchte Position der Laser-Lichtquelle an der Wand der Halle.

Modelllösung d)

(1) Zeichnung:



Abbildung

(2) Die Ebenengleichung von E^* liefert für $(r_B;s_B)=(5;2)$ den Ortsvektor des Punktes *B*, für $(r_S;s_S)=(4{,}5;1{,}5)$ den Ortsvektor des Punktes *S*. Daher liegen die Punkte *B* und *S* und mit ihnen auch die Strecke $\overline{BS}$ sowohl [per definitionem] in der Ebene E_{BCS} als auch in der Ebene E^* und somit auf der Schnittgeraden *g* von E^* und E_{BCS}.
[Alternativ kann auch zuerst eine Gleichung der Schnittgeraden *g* berechnet werden.]

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) zeigt, dass die Pyramidenspitze die Koordinaten $S(4{,}5 \mid 4{,}5 \mid 2)$ hat.	4
2	(2) berechnet die Seitenlängen des Dreiecks *ABS*.	4
3	(3) bestimmt das Volumen und den Oberflächeninhalt der Pyramide.	6
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	ermittelt die Koordinaten der Eckpunkte des Schattendreiecks.	6
2	zeigt, dass es sich um ein gleichschenkliges Dreieck handelt.	3
3	berechnet seinen Flächeninhalt.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) zeigt, dass *M* der Mittelpunkt der Seitenhalbierenden der Dreiecksseite $\overline{AB}$ ist.	6
2	(2) zeigt, dass der Laserstrahl in Richtung des Vektors $\vec{l}$ verläuft.	4
3	(2) ermittelt die Koordinaten der Position der Laser-Lichtquelle an der Wand der Halle.	6
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl**
1	(1) zeichnet die Spur des rotierenden Laserstrahls in die *Abbildung* ein.	4
2	(2) entscheidet, ob die Pyramidenkante $\overline{BS}$ auf der Schnittgeraden *g* liegt.	4
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass die …	4			
2	(2) berechnet die Seitenlängen …	4			
3	(3) bestimmt das Volumen …	6			
sachlich richtige Alternativen: (14) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**14**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt die Koordinaten …	6			
2	zeigt, dass es …	3			
3	berechnet seinen Flächeninhalt.	3			
sachlich richtige Alternativen: (12) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**12**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass *M* …	6			
2	(2) zeigt, dass der …	4			
3	(2) ermittelt die Koordinaten …	6			
sachlich richtige Alternativen: (16) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**16**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeichnet die Spur …	4			
2	(2) entscheidet, ob die …	4			
sachlich richtige Alternativen: (8) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**8**			

	Summe insgesamt	**50**			

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	**EK**	**ZK**	**DK**
Übertrag der Punktsumme aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Übertrag der Punktsumme aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	**50**			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	**100**			
aus der Punktsumme resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 13 Abs. 2 APO-GOSt				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktsummen aus EK und ZK: ____________

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: ______________

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _________________________ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	**Punkte**	**Erreichte Punktzahl**
sehr gut plus	15	100 – 95
sehr gut	14	94 – 90
sehr gut minus	13	89 – 85
gut plus	12	84 – 80
gut	11	79 – 75
gut minus	10	74 – 70
befriedigend plus	9	69 – 65
befriedigend	8	64 – 60
befriedigend minus	7	59 – 55
ausreichend plus	6	54 – 50
ausreichend	5	49 – 45
ausreichend minus	4	44 – 39
mangelhaft plus	3	38 – 33
mangelhaft	2	32 – 27
mangelhaft minus	1	26 – 20
ungenügend	0	19 – 0