Verallgemeinerte Potenzregel zu $f(x) = x^r$

Verallgemeinerte Potenzregel:

Die Potenzregel $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ gilt viel allgemeiner für jeden reellen Exponenten (z.B. Dezimalzahlen, negative Zahlen oder auch Wurzelzahlen), nicht nur für natürliche Exponenten:

$$f(x) = x^r \rightarrow f'(x) = r \cdot x^{r-1}$$

Hinweis: Warum dies so ist, wird leider erst später (in der Jgst.12) begründet!

Beispiele: $f_1(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow f_1'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f_2(x) = \frac{-3}{x^3} = -3 \cdot x^{-3} \rightarrow f_2'(x) = -3 \cdot (-3) \cdot x^{-3-1} = 9x^{-4} = \frac{9}{x^4}$

$f_3(x) = 5 \cdot \sqrt[5]{x} = 5 \cdot x^{\frac{1}{5}} \rightarrow f_3'(x) = 5 \cdot \frac{1}{5} x^{\frac{1}{5}-1} = x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{x^{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$

Die Nutzung der verallgemeinerten Potenzregel ist allerdings nur dann möglich, wenn ein Funktionsterm in der Form $a \cdot x^r$ notiert ist.

Wiederholung: Definition von Potenzen

Wenn $x \neq 0$: $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ z. B. $\frac{1}{x^7} = x^{-7}$; $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$; $\frac{1}{x} = x^{-1}$

Wenn $x > 0$: $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ z. B. $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}}$; $\sqrt[7]{x} = x^{\frac{1}{7}}$

Beide Definitionen kombiniert:

Wenn $x > 0$: $\frac{1}{\sqrt[n]{x}} = x^{-\frac{1}{n}}$ z. B. $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$; $\frac{5}{\sqrt{x}} = 5 \cdot x^{-\frac{1}{2}}$; $\frac{-4}{\sqrt[4]{x}} = -4 \cdot x^{-\frac{1}{4}}$

Wiederholung: Rechenregeln für Potenzen

Potenzsatz $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$ z. B. $(x^3)^2 = x^3 \cdot x^3 = x^6 = x^{3 \cdot 2}$

Spezialfall: $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$ z. B. $\sqrt[5]{x^7} = \left(\sqrt[5]{x}\right)^7 = \left(x^{\frac{1}{5}}\right)^7 = x^{\frac{7}{5}}$

Beispiele zur Schreibweise in der Form x^r:

$\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} = x^{-\frac{4}{3}}$; $\frac{7}{\sqrt[5]{x^{-4}}} = \frac{7}{x^{-\frac{4}{5}}} = \frac{7}{\frac{1}{x^{\frac{4}{5}}}} = 7 \cdot x^{\frac{4}{5}}$

1. Forme um zu einem Term $a \cdot x^r$:

   a) $f(x) = 7 \cdot \sqrt{x}$ b) $f(x) = -9 \cdot \sqrt[3]{x}$ c) $f(x) = \frac{1}{3 \cdot x^4}$ d) $f(x) = \frac{-4}{x^6}$

2. Leite die Funktionen aus 1. ab.

3. Forme um und leite ab:

   a) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ b) $f(x) = \frac{1}{x^2} + 7x$ c) $f(x) = -\frac{3}{x^3} + \frac{1}{5 \cdot x^5}$

   d) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{2}x^2$ e) $f(x) = -4 \cdot \sqrt[4]{x} + 5$ f) $f(x) = -0{,}5 \cdot x^2 + 7 \cdot \sqrt[7]{x}$

   g) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} - 6$ h) $f(x) = 5 + \frac{9}{\sqrt[3]{x}}$ i) $f(x) = 19x - \frac{6}{\sqrt[6]{x}}$

   j) $f(x) = \frac{5}{3 \cdot \sqrt[5]{x^6}} + x$ k) $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{3}{7 \cdot \sqrt[3]{x^7}}$ l) $f(x) = -\pi + \frac{4{,}7}{2 \cdot \sqrt{x^5}} + \pi \cdot x$