

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2010

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2010

1. Inhaltliche Schwerpunkte

- Untersuchung von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich notwendiger Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) in Sachzusammenhängen
- Untersuchungen von Wirkungen (Änderungsrate)
- Flächenberechnung durch Integration

2. Medien/Materialien

- entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

$$\begin{aligned} f(t) = 0 &\Leftrightarrow \frac{3}{4}t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 6t = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee t^2 - 6t + 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 0 \vee t = 2 \vee t = 4 \end{aligned}$$

Die Funktion f hat die Nullstellen 0, 2 und 4.

Die positiven Funktionswerte von f für $0 < t < 2$ bedeuten: Zwischen 6.00 Uhr und 8.00 Uhr nimmt die Staulänge zu. Die negativen Funktionswerte von f für $2 < t < 4$ bedeuten: Zwischen 8.00 Uhr und 10.00 Uhr nimmt die Staulänge ab.

Modelllösung b)

Die gesuchten Zeitpunkte sind die Zeiten t_{\max} bzw. t_{\min} , zu denen die Funktion f ihr [absolutes] Maximum $f(t_{\max}) > 0$ bzw. ihr [absolutes] Minimum $f(t_{\min}) < 0$ annimmt.

Ist $f'(t_0) = 0$ und $f''(t_0) > 0$ [$f''(t_0) < 0$], dann ist $(t_0 | f(t_0))$ ein lokaler Tiefpunkt [Hochpunkt] des Graphen von f .

$$f'(t) = \frac{9}{4}t^2 - 9t + 6; \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 0,845 \vee t = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 3,155.$$

Die Untersuchung von f'' oder des Vorzeichenwechsels von f' ergibt: An der Stelle

$t = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 0,845$ wird ein lokales Maximum mit positivem Funktionswert und an der

Stelle $t = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 3,155$ ein lokales Minimum mit negativem Funktionswert angenommen.

Wegen $f(0) = f(4) = 0$ (Randwerte) sind die lokalen Extrema auch die absoluten Extrema im Zeitintervall $[0;4]$.

Die Staulänge nimmt also um 6.51 Uhr am schnellsten zu und nimmt um 9.09 Uhr am schnellsten ab.

Modelllösung c)

(1) Da $f(t)$ die momentane Änderungsrate der Staulänge in Kilometern pro Stunde angibt und die Staulänge zum Zeitpunkt $t = 0$ laut Aufgabenstellung 0 km beträgt, berechnet

sich die Staulänge zum Zeitpunkt t , $0 \leq t \leq 4$, durch das bestimmte Integral $\int_0^t f(u) du$:

$$\int_0^t \left(\frac{3}{4}u^3 - \frac{9}{2}u^2 + 6u \right) du = \frac{3}{16}t^4 - \frac{3}{2}t^3 + 3t^2 = F(t)$$

(2) Wegen $F(0,5) \approx 0,574$ beträgt die Staulänge um 6.30 Uhr ca. 570 m.

(3) $F(1) - F(0,5) \approx 1,113$. Von 6.30 Uhr bis 7.00 Uhr hat die Staulänge um ca. 1,1 km zugenommen. Daraus ergibt sich für den Zeitraum von 6.30 Uhr bis 7.00 Uhr eine mittlere zeitliche Änderungsrate von ca. 2,2 km/h.

(4) An der Nullstelle $t_m = 2$ der Ableitungsfunktion f von F wechselt f das Vorzeichen von + nach - (vgl. *Abbildung 1*). Daher ist $t_m = 2$ lokale Maximalstelle von F .

Da F die Randwerte $F(0) = F(4) = 0$ hat, ist $F(2) = 3$ [absolutes] Maximum von F :

Um 8.00 Uhr ist die Staulänge maximal; sie beträgt dann 3 km.

Modelllösung d)

(1) Der Stau besteht von 6.00 bis 10.00 Uhr, hat also zu diesen Uhrzeiten jeweils die Länge 0. Da die zwischen dem Graphen von g und der t -Achse eingeschlossenen Flächenstücke beide oberhalb der t -Achse liegen, würde die Staulänge im gesamten Zeitintervall $[0; 4]$ zunehmen und um 10.00 Uhr ihr Maximum erreichen, im Widerspruch zur Voraussetzung. [Zur Information: Die Funktion g , deren Graph in *Abbildung 2* dargestellt ist, hat die

$$\text{Gleichung } g(t) = -\frac{1}{3}t \cdot (t - 2,5)^2 \cdot (t - 4).]$$

(2) Eine der folgenden Bedingungen oder eine gleichwertige wird erwartet:

1. Die Funktion h muss im Zeitintervall $[0; 4]$ sowohl positive als auch negative Werte annehmen.
2. Der Graph von h muss im Zeitintervall $[0; 4]$ mit der t -Achse mindestens zwei Flächenstücke einschließen, die auf verschiedenen Seiten der t -Achse liegen. Die oberhalb der t -Achse (im 1. Quadranten) liegenden Flächenstücke müssen zusammen genau so groß sein wie die Flächenstücke unterhalb der t -Achse (im 4. Quadranten).

[Andere Formulierungen und Bedingungen sind möglich.]

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

| | Anforderungen | maximal erreichbare Punktzahl (AFB) ¹ |
|---|---|--|
| | Der Prüfling | |
| 1 | berechnet die Nullstellen von f . | 3 (I) |
| 2 | erklärt die Bedeutung positiver und negativer Funktionswerte von f im Sachzusammenhang. | 3 (II) |
| Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. | | |

Teilaufgabe b)

| | Anforderungen | maximal erreichbare Punktzahl (AFB) |
|---|--|-------------------------------------|
| | Der Prüfling | |
| 1 | erklärt, dass die absoluten Extremstellen von f zu bestimmen sind. | 3 (II) |
| 2 | berechnet die Nullstellen von f' . | 4 (I) |
| 3 | bestimmt die absoluten Extremstellen von f . | 4 (II) |
| 4 | interpretiert die Ergebnisse im Sachzusammenhang. | 3 (II) |
| Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. | | |

Teilaufgabe c)

| | Anforderungen | maximal erreichbare Punktzahl (AFB) |
|---|--|-------------------------------------|
| | Der Prüfling | |
| 1 | (1) begründet, warum die Funktion F die Staulänge zum Zeitpunkt t beschreibt. | 5 (II) |
| 2 | (2) berechnet die Staulänge für 6.30 Uhr. | 2 (I) |
| 3 | (3) berechnet, um wie viel die Staulänge von 6.30 Uhr bis 7.00 Uhr zunimmt, und gibt für diesen Zeitraum die durchschnittliche zeitliche Änderungsrate an. | 5 (I) |
| 4 | (4) bestimmt den Zeitpunkt, zu dem die Staulänge ihr Maximum erreicht. | 6 (II) |
| 5 | (4) berechnet die maximale Staulänge. | 2 (I) |
| Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. | | |

¹ AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe d)

| | Anforderungen | maximal erreichbare Punktzahl (AFB) |
|---|--|--|
| | Der Prüfling | |
| 1 | (1) begründet, warum die momentane Änderungsrate der Staulänge nicht durch g modelliert werden kann. | 5 (II) |
| 2 | (2) ermittelt eine notwendige Bedingung, die jede sinnvolle Modellierungsfunktion h erfüllen muss. | 5 (III) |
| Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet. | | |

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: _____ Kursbezeichnung: _____

Schule: _____

Teilaufgabe a)

| Anforderungen | | Lösungsqualität | | | |
|---|-------------------------------|-------------------------------------|-----------------|----|----|
| | Der Prüfling | maximal erreichbare Punktzahl (AFB) | EK ² | ZK | DK |
| 1 | berechnet die Nullstellen ... | 3 (I) | | | |
| 2 | erklärt die Bedeutung ... | 3 (II) | | | |
| sachlich richtige Alternativen: (6) | | | | | |
| Summe Teilaufgabe a) | | 6 | | | |

Teilaufgabe b)

| Anforderungen | | Lösungsqualität | | | |
|--|----------------------------------|-------------------------------------|----|----|----|
| | Der Prüfling | maximal erreichbare Punktzahl (AFB) | EK | ZK | DK |
| 1 | erklärt, dass die ... | 3 (II) | | | |
| 2 | berechnet die Nullstellen ... | 4 (I) | | | |
| 3 | bestimmt die absoluten ... | 4 (II) | | | |
| 4 | interpretiert die Ergebnisse ... | 3 (II) | | | |
| sachlich richtige Alternativen: (14) | | | | | |
| Summe Teilaufgabe b) | | 14 | | | |

² EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

| Anforderungen | | Lösungsqualität | | | |
|--|---------------------------------|-------------------------------------|----|----|----|
| Der Prüfling | | maximal erreichbare Punktzahl (AFB) | EK | ZK | DK |
| 1 | (1) begründet, warum die ... | 5 (II) | | | |
| 2 | (2) berechnet die Staulänge ... | 2 (I) | | | |
| 3 | (3) berechnet, um wie ... | 5 (I) | | | |
| 4 | (4) bestimmt den Zeitpunkt ... | 6 (II) | | | |
| 5 | (4) berechnet die maximale ... | 2 (I) | | | |
| sachlich richtige Alternativen: (20) | | | | | |
| Summe Teilaufgabe c) | | 20 | | | |

Teilaufgabe d)

| Anforderungen | | Lösungsqualität | | | |
|--|-----------------------------------|-------------------------------------|----|----|----|
| Der Prüfling | | maximal erreichbare Punktzahl (AFB) | EK | ZK | DK |
| 1 | (1) begründet, warum die ... | 5 (II) | | | |
| 2 | (2) ermittelt eine notwendige ... | 5 (III) | | | |
| sachlich richtige Alternativen: (10) | | | | | |
| Summe Teilaufgabe d) | | 10 | | | |

| | | | | | |
|------------------------|--|-----------|--|--|--|
| Summe insgesamt | | 50 | | | |
|------------------------|--|-----------|--|--|--|

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.