Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2009

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich notwendiger Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Untersuchungen von Wirkungen (Änderungsrate)
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Für den Ansatz $s(t) = at^3 + bt^2 + ct + d\ (a,b,c,d \in IR; a \neq 0)$ liefern die gegebenen Bedingungen: (1) $s(0) = 0$; (2) $s(1) = 1$; (3) $s(2) = 3$; (4) $s(4) = 6$.

Aus (1) folgt: $d = 0$; weiterhin folgt aus (2) bis (4):

$$\left|\begin{array}{rl} a + b + c &= 1 \\ \wedge\ 8a + 4b + 2c &= 3 \\ \wedge\ 64a + 16b + 4c &= 6 \end{array}\right| \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left|\begin{array}{rl} a + b + c &= 1 \\ \wedge\ 6a + 2b &= 1 \\ \wedge\ 12a &= -2 \end{array}\right|$$

Die Lösung des Gleichungssystems liefert $a = -\frac{1}{6}$; $b = 1$; $c = \frac{1}{6}$; mit $d = 0$ gilt so:

$$s(t) = -\frac{1}{6}t^3 + t^2 + \frac{1}{6}t\,.$$

Modelllösung b)

Bestimmung der Extrempunkte

$s'(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t + \frac{1}{6}$ und $s''(t) = -t + 2$ (Summen-, Faktorregel)

Die notwendige Bedingung $s'(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}t^2 + 2t + \frac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow t_{1/2} = 2 \pm \frac{\sqrt{39}}{3}$

liefert zwei mögliche Extremstellen.

Mit $s'(t_e) = 0 \wedge s''(t_e) \neq 0$, konkret $s''\left(2 + \frac{\sqrt{39}}{3}\right) = -\left(2 + \frac{\sqrt{39}}{3}\right) + 2 = -\frac{\sqrt{39}}{3} < 0$

und $s''\left(2 - \frac{\sqrt{39}}{3}\right) = -\left(2 - \frac{\sqrt{39}}{3}\right) + 2 = \frac{\sqrt{39}}{3} > 0$, folgt:

In $t_1 = 2 + \frac{\sqrt{39}}{3} \approx 4{,}08$ liegt ein lokales Maximum und in $t_2 = 2 - \frac{\sqrt{39}}{3} \approx -0{,}08$ ein lokales Minimum vor.

Im betrachteten Intervall liegt keine der berechneten lokalen Extremstellen. Die Randüberprüfung liefert mit $s(0) = 0$ und $s(4) = 6$, dass das absolute Maximum in $t = 4$ liegt. Inhaltlich ist dies plausibel, da das betrachtete Fahrzeug am Ende der Messung die größte Wegstrecke zurückgelegt hat.

Modelllösung c)

(1) Mit $s'(t) = v(t)$ folgt $v(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t + \frac{1}{6}$.

Mit $v(0) = \frac{1}{6}$ ergibt sich die Geschwindigkeit des Fahrzeugs am Stoppschild: Sie beträgt 1/6 Kilometer pro Minute, also 10 km/h. Der Fahrer hat folglich nicht angehalten.
[Hier sollen auch alternative Lösungen akzeptiert werden, die z. B. nur die Tabelle als Argumentationsgrundlage nutzen.]

(2) Bestimmung der maximalen Geschwindigkeit im Intervall [0;4]
$v'(t) = -t + 2$ und $v''(t) = -1$ (Summen-, Faktorregel)
Die notwendige Bedingung $v'(t) = 0 \Leftrightarrow -t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ liefert eine mögliche Extremstelle.
Mit $v''(2) = -1 < 0$ liegt in $t = 2$ ein lokales Maximum mit $v(2) = 2\frac{1}{6}$.
Die Überprüfung der Ränder ergibt $v(0) = \frac{1}{6}$ und $v(4) = \frac{1}{6}$, dass $2\frac{1}{6}$ absolutes Maximum der Geschwindigkeitsfunktion im Intervall [0;4] ist.
Die Maximalgeschwindigkeit liegt mit 2 1/6 Kilometer pro Minute, also 130 km/h, deutlich über der zulässigen Höchstgeschwindigkeit.

(3) Der von der Schülergruppe gewählte Ansatz ist sicherlich nicht zulässig. Mögliche Argumente lauten:
- zu wenige Messwerte für eine stetige Modellierung,
- Wahl einer Funktion dritten Grades ist problematisch,
- Messpunkte zu weit auseinander, da die Momentangeschwindigkeit nicht exakt angegeben werden kann,
- Berücksichtigung der Messgenauigkeit,
- die Tabelle ist ausreichend für die Verwendung eines stückweise linearen Modells.

Modelllösung d)

Die Beschleunigungsfunktion a hat die Gleichung $a(t) = v'(t) = -t + 2$.

Im Intervall [0;2] ist die Beschleunigungsfunktion a positiv. Die zugehörige Geschwindigkeitsfunktion v ist in diesem Intervall mit positiver Ableitung streng monoton steigend. In $t = 2$ besitzt der Graph von v eine waagerechte Tangente, da $v'(t) = a(t) = 0$. Mit dem (+/−)-Vorzeichenwechsel von a besitzt die Geschwindigkeitsfunktion hier ein lokales Maximum. Für $t > 2$ ist die Geschwindigkeitsfunktion v streng monoton fallend.

In den ersten zwei Minuten der Messung wird das Fahrzeug konstant beschleunigt, die Geschwindigkeit nimmt über den gesamten Zeitraum zu. Die Höchstgeschwindigkeit wird nach 2 Minuten erreicht. Bis zur vierten Minute der Messung verringert sich nun die Geschwindigkeit immer mehr.

Mögliche Erklärungen: Die Strecke wird hier immer kurviger oder ein vorausfahrendes, langsameres Fahrzeug beendet die Raserei ... (Der Aufgabenteil gilt als gelöst, wenn eine Erklärung gegeben wird.)

Modelllösung e)

Der Graph von a mit $a(t) = -t + 2$ hat eine Nullstelle in $t = 2$.

Für die Fläche zwischen dem Graphen von a und der t-Achse gilt also:

$$A = \int_0^2 a(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 (-t+2)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}t^2 + 2t\right]_0^2 = 2\,.$$

Damit schließt der Graph von a mit der t-Achse im Intervall [0;2] eine Fläche mit 2 FE ein.

Die Geschwindigkeitsfunktion liefert an der Stelle $t = 2$ den Wert $v(2) = 2\frac{1}{6}$.

Mit dem Integral $\int_0^2 a(t)\,\mathrm{d}t = 2$ wird hier die Zunahme der Geschwindigkeit im Zeitraum von $t = 0$ bis $t = 2$ berechnet. Da aber das betrachtete Fahrzeug beim Start der Messung bereits eine Geschwindigkeit von 1/6 Kilometer pro Minute besaß, ergibt sich folglich

$$v(2) = 2\frac{1}{6} = 2 + \frac{1}{6}.$$

Die tatsächliche Geschwindigkeit ergibt sich in allen Fällen als Summe der Anfangsgeschwindigkeit bzw. des Anfangswertes und dem Wert des Integrals über a im Intervall [0;2].

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)[1]
1	gibt die benötigten Gleichungen an.	2 (I)
2	ermittelt die Lösung des linearen Gleichungssystems.	5 (II)
3	nennt den Funktionsterm.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	berechnet die Extremstellen des Graphen von *s*.	5 (I)
2	weist die Lage des absoluten Maximums in $t = 4$ nach.	2 (II)
3	begründet die Lage des absoluten Maximums im Sachzusammenhang.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	(1) gibt die Geschwindigkeitsfunktion *v* an.	3 (I)
2	(1) prüft die Beachtung des Stoppschildes.	3 (II)
3	(2) bestimmt maximale Geschwindigkeit im Intervall [0;4].	5 (II)
4	(3) beurteilt mit mindestens zwei unterschiedlichen Argumenten die Angemessenheit der gewählten Modellfunktion.	4 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

[1] AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe d)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	(1) gibt die Beschleunigungsfunktion a an.	2 (I)
2	(2) beschreibt die Bedeutung der Werte der Beschleunigungsfunktion a für die Geschwindigkeitsfunktion v.	4 (II)
3	(2) gibt eine Möglichkeit für ein verändertes Fahrverhalten an.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal **erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	berechnet den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von a und der t-Achse im Intervall $[0;2]$ und gibt den Wert von $v(2)$ an.	4 (I)
2	interpretiert den Wert des Integrals mit dem Funktionswert $v(2)$ und erläutert die Differenz im Sachzusammenhang.	3 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	gibt die benötigten …	2 (I)			
2	ermittelt die Lösung …	5 (II)			
3	nennt den Funktionsterm.	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (9) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**9**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet die Extremstellen …	5 (I)			
2	weist die Lage …	2 (II)			
3	begründet die Lage …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (10) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**10**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt die Geschwindigkeitsfunktion …	3 (I)			
2	(1) prüft die Beachtung …	3 (II)			
3	(2) bestimmt die maximale …	5 (II)			
4	(3) beurteilt mit mindestens …	4 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (15) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**15**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) gibt die Beschleunigungsfunktion …	2 (I)			
2	(2) beschreibt die Bedeutung …	4 (II)			
3	(2) gibt eine Möglichkeit …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (9) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**9**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet den Flächeninhalt …	4 (I)			
2	interpretiert den Wert …	3 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (7) …………………………………………………………………… ……………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**7**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.