

## *Unterlagen für die Lehrkraft*

# **Abiturprüfung 2008**

## *Mathematik, Grundkurs*

---

### **1. Aufgabenart**

Analysis

### **2. Aufgabenstellung**

siehe Prüfungsaufgabe

### **3. Materialgrundlage**

- entfällt

### **4. Bezüge zu den Vorgaben 2008**

#### *1. Inhaltliche Schwerpunkte*

- Untersuchung von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich notwendiger Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) in Sachzusammenhängen
- Untersuchungen von Wirkungen
- Flächenberechnung durch Integration

#### *2. Medien/Materialien*

- entfällt

### **5. Zugelassene Hilfsmittel**

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

## 6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

### 6.1 Modellösungen

#### Modellösung a)

Zu Beginn des Trainingsabschnitts hat der Sportler eine Herzfrequenz von 80 Schlägen pro Minute. Nach 10 Minuten erreicht die Herzfrequenz ein Maximum von ca. 170 S/min und sinkt in den folgenden Minuten auf ein Minimum von ca. 140 S/min. Nach ca. 24 Minuten steigt die Herzfrequenz wieder an und erreicht nach 30 Minuten den Wert von 170 S/min. Die maximale Herzschlagfrequenz eines erwachsenen Mannes liegt nach der angegebenen Formel deutlich unter 220 S/min. Für  $t = 32$  liefert die Funktion  $f$  eine Herzfrequenz von ungefähr 199 S/min und liegt damit in der Nähe der maximalen Herzfrequenz eines 21-jährigen Mannes. Rechts der beiden Extremstellen steigt der Graph der ganzrationalen Funktion  $f$  vom Grad 3 streng monoton, das würde einem ständig weiteren Anstieg der Herzfrequenz entsprechen und beschreibt damit die Herzfrequenz nicht sinnvoll. (Alternativ: Begründung der Monotonie über die Positivität der 1. Ableitung für  $t > 32$ )

#### Modellösung b)

Bestimmung der Extrema der Funktion  $f$ :

$$f'(t) = 0,09 \cdot t^2 - 3 \cdot t + 21 = 0 \Leftrightarrow t = 10 \vee t = 23\frac{1}{3}$$

$$f''(t) = 0,18 \cdot t - 3 \Rightarrow f''(10) = -1,2 < 0 \wedge f''(23\frac{1}{3}) = 1,2 > 0$$

(Alternativ: Vorzeichenwechsel der Funktion  $f'$  an den Stellen  $t = 10$  und  $t = 23\frac{1}{3}$ )

Die Funktion  $f$  besitzt das relative Maximum  $f(10) = 170$  und das relative Minimum

$$f(23\frac{1}{3}) = 134\frac{4}{9} \approx 134,4.$$

Beide Werte liegen innerhalb des vorgegebenen Herzfrequenzwertintervalls ]140 ; 180[. Da auch die Randwerte  $f(5) = 151,25$  und  $f(30) = 170$  des restlichen Trainingsabschnitts innerhalb dieses Bereichs liegen, wurde die Vorgabe des Trainers eingehalten.

**Modelllösung c)**

Gesucht ist die Stelle  $t$ , an der die Änderungsrate  $f'$  mit  $f'(t) = 0,09 \cdot t^2 - 3 \cdot t + 21$  ein negatives Minimum besitzt.

Bestimmung der Koordinaten des absoluten Tiefpunkts des Graphen der Funktion  $f'$ , d. h. des Scheitelpunkts der nach oben geöffneten Parabel:

$$f'(t) = 0,09 \cdot t^2 - 3 \cdot t + 21 = 0,09 \cdot \left(t^2 - \frac{100}{3} + \frac{700}{3}\right) = 0,09 \cdot \left(t - \frac{50}{3}\right)^2 - 4$$

$$\text{Scheitelpunkt } S\left(16\frac{2}{3} \mid -4\right)$$

(Alternativ: Bestimmung des Wendepunkts von  $f$  und Untersuchung der Randwerte)

Die Änderungsrate  $f'$  besitzt an der Stelle  $t = 16\frac{2}{3} \approx 16,7$  ein absolutes Minimum. Außer-

dem gilt  $f'(16\frac{2}{3}) = -4 < 0$ ; d. h., die Änderungsrate ist negativ. Die Herzfrequenz nimmt

ca. 16,7 Minuten nach Beginn des Trainingsabschnitts am stärksten ab.

**Modelllösung d)**

Die Anzahl aller Herzschläge im Intervall  $[0;k]$  wird bestimmt durch

$$\begin{aligned} \int_0^k f(t) dt &= \int_0^k (0,03 \cdot t^3 - 1,5 \cdot t^2 + 21 \cdot t + 80) dt \\ &= \left[ 0,0075 \cdot t^4 - 0,5 \cdot t^3 + 10,5 \cdot t^2 + 80 \cdot t \right]_0^k \\ &= 0,0075 \cdot k^4 - 0,5 \cdot k^3 + 10,5 \cdot k^2 + 80 \cdot k. \end{aligned}$$

Die Anzahl der Herzschläge im gesamten Trainingsabschnitt  $[0;30]$  beträgt:

$$0,0075 \cdot 30^4 - 0,5 \cdot 30^3 + 10,5 \cdot 30^2 + 80 \cdot 30 = 4425.$$

**Modelllösung e)**

Für die Differenz der Funktionswerte gilt:

$$d(t) = g(t) - f(t) = 0,03 \cdot t^3 - 1,6 \cdot t^2 + 22 \cdot t + 80 - (0,03 \cdot t^3 - 1,5 \cdot t^2 + 21 \cdot t + 80)$$

$$= -0,1 \cdot t^2 + t = -0,1 \cdot t \cdot (t - 10) \quad \left\{ \begin{array}{l} = 0 \quad \text{für } t = 0 \vee t = 10 \\ > 0 \quad \text{für alle } 0 < t < 10 \quad . \\ < 0 \quad \text{für alle } 10 < t \leq 30 \end{array} \right.$$

Für alle  $t \in ]0;10[$  gilt  $d(t) = g(t) - f(t) > 0$  bzw.  $f(t) < g(t)$ , d. h., im Zeitintervall  $]0;10[$  ist die Herzfrequenz des Radsportlers niedriger als die des Trainingspartners. Entsprechend erhält man:  $d(t) = g(t) - f(t) < 0$  bzw.  $f(t) > g(t)$  für alle  $t \in ]10;30]$ , d. h., die Herzfrequenz des Radsportlers ist im Zeitintervall  $]10;30]$  höher als die seines Trainingspartners.

Zur Ermittlung des größten Unterschieds der Herzfrequenzwerte während des Trainingsabschnitts muss sowohl das absolute Maximum als auch das absolute Minimum der Differenzfunktion  $d$  mit  $d(t) = g(t) - f(t)$  im Intervall  $[0;30]$  bestimmt werden.

Die Differenzfunktion  $d$  mit  $d(t) = g(t) - f(t) = -0,1 \cdot t^2 + t = -0,1 \cdot (t - 5)^2 + 2,5$  erreicht das absolute Maximum  $d(5) = 2,5$  im Scheitelpunkt  $S(5 | 2,5)$  der nach unten geöffneten Parabel von  $d$ .

(Alternativ:  $d'(t) = -0,2 \cdot t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 5$ ;  $d''(5) = -0,2 < 0$ )

Ein Minimum kann die Funktion  $d$  nur am Rand des Intervalls  $[0;30]$  annehmen. Aus  $d(0) = 0$  und  $d(30) = -60$  folgt, dass das absolute Minimum der Differenzfunktion  $d$  an der Stelle  $t = 30$  erreicht wird.

Der größte Unterschied der Herzfrequenzwerte wird somit zum Ende des Trainingsabschnitts ( $t = 30$ ) erreicht (und beträgt 60 Schläge pro Minute).

## 6.2 Teilleistungen – Kriterien

### Teilaufgabe a)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB) <sup>1</sup>
	Der Prüfling	
1	beschreibt den Verlauf des Graphen im Sachzusammenhang.	4 (I)
2	berechnet den Funktionswert $f(32)$ .	2 (I)
3	begründet, dass die Funktion $f$ für $t > 32$ keine sinnvolle Beschreibung der Herzfrequenz liefert.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

### Teilaufgabe b)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	ermittelt die relativen Extrema der Funktion $f$ .	6 (II)
2	berechnet die Randwerte $f(5) = 151,25$ und $f(30) = 170$ .	2 (I)
3	begründet, dass die Vorgabe des Trainers eingehalten wurde.	2 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

### Teilaufgabe c)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	ermittelt mit einem geeigneten Verfahren die Koordinaten des absoluten Tiefpunkts des Graphen der 1. Ableitung $f'$ .	4 (II)
2	stellt den Zusammenhang zwischen der Abnahme der Herzfrequenz und der Änderungsrate $f'$ dar und begründet, dass die Herzfrequenz zum Zeitpunkt $t \approx 16,7$ am stärksten abnahm.	3 (III)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

<sup>1</sup> AFB = Anforderungsbereich

**Teilaufgabe d)**

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	ermittelt den Ansatz $\int_0^k f(t)dt$ zur Berechnung der Anzahl aller Herzschläge.	3 (II)
2	bestimmt das Integral $\int_0^k f(t)dt$ .	4 (II)
3	berechnet die Anzahl aller Herzschläge im gesamten Trainingsabschnitt.	4 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

**Teilaufgabe e)**

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	weist nach, dass die Ungleichungen $f(t) < g(t)$ für alle $0 < t < 10$ bzw. $f(t) > g(t)$ für alle $10 < t \leq 30$ erfüllt sind.	4 (II)
2	gibt die Intervalle an, in denen die Herzfrequenzwerte des Radsportlers kleiner bzw. größer als die seines Trainingspartners sind.	2 (I)
3	ermittelt einen Ansatz zur Bestimmung des größten Unterschieds und bestimmt das absolute Maximum und das absolute Minimum der Differenz der Funktionswerte.	4 (III)
4	gibt den Zeitpunkt an, zu dem der Unterschied der Herzfrequenzen der beiden Sportler am größten war.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

**7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit**

Name des Prüflings: \_\_\_\_\_ Kursbezeichnung: \_\_\_\_\_

Schule: \_\_\_\_\_

**Teilaufgabe a)**

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK <sup>2</sup>	ZK	DK
1	beschreibt den Verlauf ...	4 (I)			
2	berechnet den Funktionswert ...	2 (I)			
3	begründet, dass die ...	4 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (10) ..... .....					
<b>Summe Teilaufgabe a)</b>		<b>10</b>			

**Teilaufgabe b)**

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	ermittelt die relativen ...	6 (II)			
2	berechnet die Randwerte ...	2 (I)			
3	begründet, dass die ...	2 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (10) ..... .....					
<b>Summe Teilaufgabe b)</b>		<b>10</b>			

<sup>2</sup> EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

**Teilaufgabe c)**

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	ermittelt mit einem ...	4 (II)			
2	stellt den Zusammenhang ...	3 (III)			
sachlich richtige Alternativen: (7) ..... .....					
<b>Summe Teilaufgabe c)</b>		<b>7</b>			

**Teilaufgabe d)**

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	ermittelt den Ansatz ...	3 (II)			
2	bestimmt das Integral ...	4 (II)			
3	berechnet die Anzahl ...	4 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (11) ..... .....					
<b>Summe Teilaufgabe d)</b>		<b>11</b>			

**Teilaufgabe e)**

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	weist nach, dass ...	4 (II)			
2	gibt die Intervalle ...	2 (I)			
3	ermittelt einen Ansatz ...	4 (III)			
4	gibt den Zeitpunkt ...	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (12) ..... .....					
<b>Summe Teilaufgabe e)</b>		<b>12</b>			

<b>Summe insgesamt</b>	<b>50</b>			
------------------------	-----------	--	--	--

**Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.**