Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung[1]

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2011

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich notwendiger Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Untersuchungen von Wirkungen (Änderungsrate)
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

[1] Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

Der Sachkontext erfordert die Nachweise, dass der Graph von f_a streng monoton steigend ist und für große Werte von *t sich* einem „festen Wert" nähert.

(1) $f_a'(t) = 0{,}25a \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}$

Da $e^{-0{,}25 \cdot t} > 0$ für $t \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ ist, folgt, dass $f_a'(t) > 0$ für $t \geq 0$ gilt.

$\Rightarrow$ Der Graph von f_a ist streng monoton steigend.

Für große Werte von *t* gilt: $e^{-0{,}25 \cdot t}$ strebt gegen 0 $\Rightarrow f_a(t)$ strebt gegen *a*.

Langfristig stellt sich ein Medikamentenspiegel von ungefähr a $\mathrm{mg/l}$ im Blut ein.

(2) Eine Vergrößerung von *a* bedeutet ein schnelleres Ansteigen der Konzentration des Medikaments. Bei langfristiger Einnahme strebt die Konzentration auf a $\mathrm{mg/l}$ im Blut zu (siehe auch (1)).

(3) 11 Uhr $\mathrel{\hat{=}}$ $t = 2$

Also gilt: $f_a(2) = 5{,}902$ bzw.

$$a(1 - e^{-0{,}25 \cdot 2}) = 5{,}902 \Leftrightarrow a = \frac{5{,}902}{1 - e^{-0{,}5}} = 14{,}999... \approx 15$$

(4) $f(3) = 15 \cdot (1 - e^{-0{,}75}) \approx 7{,}91$

Um 12 Uhr beträgt die Wirkstoffkonzentration im Blut ungefähr $7{,}91\ \mathrm{mg/l}$.

Modelllösung b)

(1) Für $t \geq 16$ gilt dann:

$$\begin{aligned} g(t) &= f(16) \cdot e^{-0{,}25 \cdot (t-16)} \\ &= f(16) \cdot e^{-0{,}25 \cdot t} \cdot e^{4} \\ &= 15 \cdot (1 - e^{-4}) \cdot e^{4} \cdot e^{-0{,}25 \cdot t} \\ &\approx 803{,}972... \cdot e^{-0{,}25 \cdot t} \\ &\approx 804 \cdot e^{-0{,}25 \cdot t} \end{aligned}$$

(2) Der Term $g'(t)$ beschreibt die Änderung der Wirkstoffkonzentration.

Es gilt: $g'(t) = -201 \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}$

(3) 4 Uhr $\mathrel{\hat{=}}$ $t = 19$ und 5 Uhr $\mathrel{\hat{=}}$ $t = 20$

$\Rightarrow$ Der gesuchte Prozentsatz lässt sich aus

$$\frac{|k'(20)|}{|k'(19)|} = \frac{201 \cdot e^{-0{,}25 \cdot 20}}{201 \cdot e^{-0{,}25 \cdot 19}} = e^{-0{,}25} \approx 0{,}779 \text{ ermitteln.}$$

$\Rightarrow$ Die Wirkstoffkonzentration nimmt in jeder Stunde um ca. 22 % ab.

Modelllösung c)

(1) Berechnung des Zeitpunktes, zu dem die Wirkstoffkonzentration von $8\ \mathrm{mg/l}$ (erstmals) erreicht wird:

$f(t_1) = 8$, d. h.

$$15 \cdot (1 - e^{-0,25 \cdot t_1}) = 8 \Leftrightarrow e^{-0,25 \cdot t_1} = \frac{7}{15} \Leftrightarrow t_1 = -4 \cdot \ln\frac{7}{15} = 3,048...$$

Berechnung des Zeitpunktes, zu dem die Wirkstoffkonzentration wieder auf $8\ \mathrm{mg/l}$ abgesunken ist:

$g(t_2) = 8$, d. h.

$$804 \cdot e^{-0,25 \cdot t_2} = 8 \Leftrightarrow e^{-0,25 \cdot t_2} = \frac{2}{201} \Leftrightarrow t_2 = -4 \cdot \ln\frac{2}{201} = 18,440...$$

Der gesuchte Zeitraum ergibt sich aus:

$t_\mathrm{D} = t_2 - t_1 = 15,392...\ \mathrm{h} = 15\ \mathrm{h}\ 23,52...\ \mathrm{min} \approx 15\ \mathrm{h}\ 24\ \mathrm{min}$.

(2) Für die mittlere Wirkstoffkonzentration innerhalb des vorgegebenen Zeitraums gilt:

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{24}\left(\int_0^{16} f(t)\mathrm{d}t + \int_{16}^{24} g(t)\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{24}\left(\int_0^{16} 15 \cdot \left(1 - e^{-0,25 \cdot t}\right)\mathrm{d}t + \int_{16}^{24} 804 \cdot e^{-0,25 \cdot t}\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{24}\left(\left[15 \cdot \left(t + 4 \cdot e^{-0,25 \cdot t}\right)\right]_0^{16} + \left[-3216 \cdot e^{-0,25 \cdot t}\right]_{16}^{24}\right) \\ &= \frac{1}{24}\left(\left[15 \cdot \left(16 + 4 \cdot e^{-4}\right) - 15 \cdot 4\right] + \left[-3216 \cdot \left(e^{-6} - e^{-4}\right)\right]\right) \\ &\approx 9,668\ \mathrm{mg/l}. \end{aligned}$$

(3) Medikamentenkonzentration am 16. April um 10 Uhr $\hat{=}$ $g(25)$

$g(25) = 804 \cdot e^{-6,25} \approx 1,552\ \mathrm{mg/l}$

Das neue Medikament kann am 16. April um 10 Uhr noch nicht eingesetzt werden, da die Wirkstoffkonzentration des alten Medikaments zu diesem Zeitpunkt über $1\ \mathrm{mg/l}$ im Blut liegt.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) zeigt rechnerisch, dass die Funktion f_a streng monoton steigend ist.	5
2	(1) zeigt, dass die Funktion „langfristig" auf einen festen Wert zustrebt.	3
3	(2) beschreibt die Bedeutung des Parameters *a* im Sachzusammenhang.	2
4	(3) berechnet den Parameterwert von *a*.	3
5	(4) berechnet $f(3)$.	2
6	(4) interpretiert den Wert im Sachzusammenhang.	2
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) zeigt, dass $g(t) = 804 \cdot e^{-0,25 \cdot t}$ die Wirkstoffkonzentration für $t \geq 16$ näherungsweise beschreibt.	5
2	(2) gibt an, dass $g'(t)$ die Änderung der Wirkstoffkonzentration beschreibt, und berechnet $g'(t)$.	3
3	(3) bestimmt den Prozentsatz.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen **Der Prüfling**	maximal erreichbare Punktzahl
1	(1) bestimmt die Zeitspanne, in der das Medikament wirksam ist.	8
2	(2) gibt einen Ansatz zur Berechnung der mittleren Wirkstoffkonzentration im angegeben Zeitraum an.	4
3	(2) ermittelt die mittlere Wirkstoffkonzentration im Zeitraum 15. April (9 Uhr) und 16. April (9 Uhr).	7
4	(3) prüft, ob die Aufnahme der Infusion mit dem neuen Medikament zu diesem Zeitpunkt im Sachzusammenhang sinnvoll ist.	3
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**[2]	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt rechnerisch, dass …	5			
2	(1) zeigt, dass die …	3			
3	(2) beschreibt die Bedeutung …	2			
4	(3) berechnet den Parameterwert …	3			
5	(4) berechnet $f(3)$.	2			
6	(4) interpretiert den Wert …	2			
sachlich richtige Alternativen: (17) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe a)	**17**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) zeigt, dass $g(t) = 804 \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}$ …	5			
2	(2) gibt an, dass …	3			
3	(3) bestimmt den Prozentsatz.	3			
sachlich richtige Alternativen: (11) …………………………………………………………………. ………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe b)	**11**			

[2] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	(1) bestimmt die Zeitspanne …	8			
2	(2) gibt einen Ansatz …	4			
3	(2) ermittelt die mittlere …	7			
4	(3) prüft, ob die …	3			
sachlich richtige Alternativen: (22) ……………………………………………………………………. …………………………………………………………………….					
	Summe Teilaufgabe c)	**22**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.