Name: ____________________

Abiturprüfung 2011

Mathematik, Grundkurs

Aufgabenstellung:

Ein Medikament wird über eine (intravenöse) Dauerinfusion dem Körper kontinuierlich und gleichmäßig zugeführt. Die Konzentration des Wirkstoffes im Blut steigt dabei kontinuierlich an und strebt bei „langfristiger Infusion“ auf eine „Endkonzentration“ zu.

a) (1) *Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion f_a mit der Funktionsgleichung*

$$f_a(t) = a \cdot (1 - e^{-0,25 \cdot t}) \text{ für } t \geq 0 \;\; (a > 0)$$

die Wirkstoffkonzentration des Medikaments im Blut angemessen beschreibt, d. h., dass die Funktion die beiden oben im Text genannten Kriterien erfüllt.
(t in Stunden; $f_a(t)$ in mg/l)

Die Graphen von f_5, f_{10} und f_{15} sind in *Abbildung 1* dargestellt.
(t-Achse: 1 LE entspricht 1 Stunde; $f(t)$-Achse: 1 LE entspricht 1 mg/l)

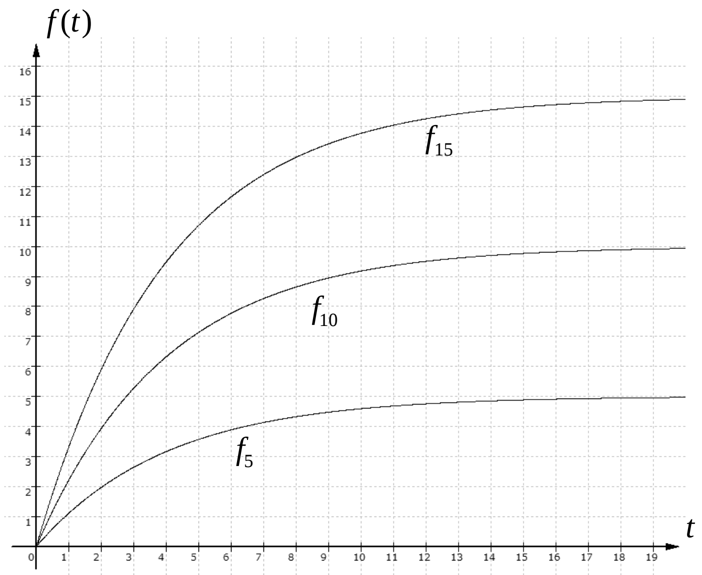

Abbildung 1

Name: ____________________

(2) *Beschreiben Sie die Bedeutung des Parameters a im Sachzusammenhang. Nutzen Sie dazu den Funktionsterm von f_a und die drei Beispielgraphen.*

Die Infusion wird am 15. April um 9 Uhr ($t = 0$) begonnen.
Um 11 Uhr wird eine Wirkstoffkonzentration des Medikaments von 5,902 mg/l im Blut gemessen.

(3) *Berechnen Sie den Parameterwert von a in der Funktionsgleichung von f_a, die den zeitlichen Verlauf der Wirkstoffkonzentration des Medikaments modelliert.*

Im Folgenden soll die Wirkstoffkonzentration durch die Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(t) = 15 \cdot (1 - e^{-0,25 \cdot t})$ modelliert werden.

(4) *Berechnen Sie $f(3)$ und interpretieren Sie den Wert im Sachzusammenhang.*

(17 Punkte)

Wenn die Infusion nach t_E Stunden abgebrochen wird, nimmt die Wirkstoffkonzentration des Medikaments im Blut ab. Modellhaft wird angenommen, dass unmittelbar nach Abbruch der Infusion die Abnahme der Wirkstoffkonzentration beginnt.

Die Wirkstoffkonzentration kann jetzt durch die Funktion g mit der Funktionsgleichung

$$g(t) = f(t_\mathrm{E}) \cdot e^{-0,25 \cdot (t - t_E)} \quad (t \geq t_E) \text{ beschrieben werden.}$$

Um 1 Uhr des nächsten Tages wird die Infusion abgebrochen.

b) (1) *Zeigen Sie, dass $g(t) = 804 \cdot e^{-0,25 \cdot t}$ die Wirkstoffkonzentration für $t \geq 16$ näherungsweise beschreibt.*

Der Graph von g ist in *Abbildung 2* dargestellt.
(t-Achse: 1 LE entspricht 1 Stunde; $g(t)$-Achse: 1 LE entspricht 1 mg/l)

(2) *Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Änderung der Wirkstoffkonzentration für $t > 16$.*

(3) *Bestimmen Sie, um wie viel Prozent der Betrag der Änderung der Wirkstoffkonzentration des Medikaments am 16. April von 4 Uhr bis 5 Uhr abnimmt.*

(11 Punkte)

Name: ____________________

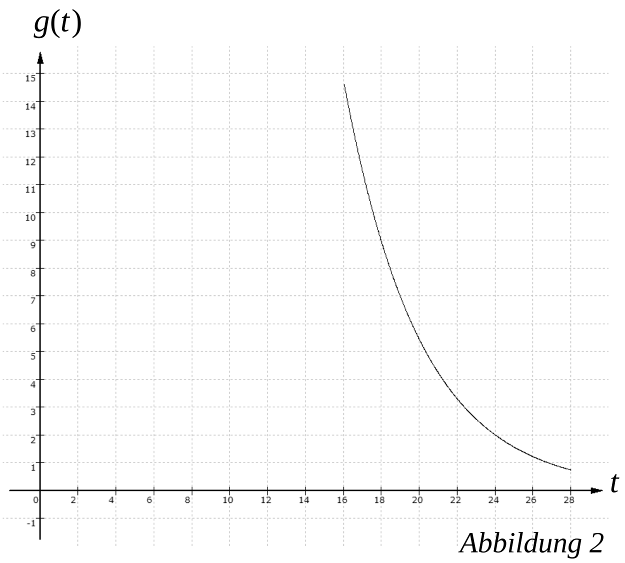

Abbildung 2

c) (1) Medizinische Untersuchungen haben ergeben, dass das Medikament nur wirksam ist, wenn die Wirkstoffkonzentration im Blut mindestens 8 mg/l beträgt.

Bestimmen Sie die Zeitspanne, in der das Medikament wirksam ist.

(2) Wenn die Funktion *h* die Wirkstoffkonzentration eines Medikaments beschreibt, wird durch $m = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} h(t)\,\mathrm{d}t$ die mittlere Wirkstoffkonzentration im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ bestimmt.

Ermitteln Sie die mittlere Wirkstoffkonzentration im Zeitraum 15. April (9 Uhr) und 16. April (9 Uhr).

Um Wechselwirkungen zwischen verschiedenen Medikamenten zu vermeiden, wird ein neues Medikament erst eingesetzt werden, wenn die Wirkstoffkonzentration des alten Medikaments unter 1 mg/l im Blut beträgt.

Am 16. April um 10 Uhr wird mit der intravenösen Dauerinfusion eines neuen Medikaments begonnen.

(3) *Prüfen Sie, ob die Aufnahme der Infusion mit dem neuen Medikament zu diesem Zeitpunkt im Sachzusammenhang sinnvoll ist.* (22 Punkte)

Name: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung