

## Unterlagen für die Lehrkraft

# Abiturprüfung 2010

## Mathematik, Grundkurs

---

### 1. Aufgabenart

Analysis

### 2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

### 3. Materialgrundlage

- entfällt

### 4. Bezüge zu den Vorgaben 2010

#### 1. Inhaltliche Schwerpunkte

- Untersuchung von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich notwendiger Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) in Sachzusammenhängen
- Untersuchungen von Wirkungen (Änderungsrate)
- Flächenberechnung durch Integration

#### 2. Medien/Materialien

- entfällt

### 5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

## 6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

### 6.1 Modelllösungen

#### Modelllösung a)

(1) Der Graph ist streng monoton fallend und linkgekrümmt: Die Temperatur des Körpers nimmt ausgehend von  $T_0 = 100 \text{ °C}$  ständig ab. Die Temperaturabnahme [pro Sekunde] wird mit zunehmender Zeit [bzw. abnehmender Temperatur] immer geringer.

(2) Einsetzen ergibt:  $T(120) = 20 + 80 \cdot e^{-1,2} \approx 44,1 \text{ [°C]}$ .

Der Körper ist auf etwa  $44,1 \text{ °C}$  abgekühlt.

(3) Die Temperatur nähert sich für große  $t$  asymptotisch der Raumtemperatur  $T_R = 20 \text{ °C}$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (20 + 80 \cdot e^{-0,01t}) = 20 \text{ [°C]}.$$

In der Praxis nimmt der Körper nach endlicher Zeit die Raumtemperatur von  $20 \text{ °C}$  an.

#### Modelllösung b)

(1) Es gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(t_2 - t_1)} \cdot (20 \cdot (t_2 - t_1) - 8000 \cdot (e^{-0,01t_2} - e^{-0,01t_1})) \\ &= \frac{1}{(t_2 - t_1)} \cdot \left[ 20 \cdot t - 8000 \cdot e^{-0,01t} \right]_{t_1}^{t_2}. \end{aligned}$$

$$(20 \cdot t - 8000 \cdot e^{-0,01t})' = 20 + 80 \cdot e^{-0,01t} = T(t).$$

Damit ist gezeigt, dass für den betrachteten Körper gilt:

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} T(t) dt = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \cdot (20 \cdot (t_2 - t_1) - 8000 \cdot (e^{-0,01t_2} - e^{-0,01t_1})).$$

[Auch der Nachweis durch Integration ist denkbar.]

(2) Einsetzen von  $t_1 = 0$  und  $t_2 = 120$  ergibt:  $\frac{1}{120} \cdot (20 \cdot 120 - 8000 \cdot (e^{-1,2} - 1)) \approx 66,6$ .

Die mittlere Temperatur beträgt ungefähr  $66,6 \text{ °C}$ .

**Modelllösung c)**

- (1) [Die geometrischen Eigenschaften der beiden im Zeitintervall  $[0;120]$  dargestellten Graphen sind für alle  $t \geq 0$  gegeben.]

Da der Graph von  $T'$  im 4. Quadranten verläuft, ist der Graph von  $T$  streng monoton fallend. Seine Linkskrümmung ist dadurch bedingt, dass der Graph von  $T'$  streng monoton steigt.

- (2) Der Betrag der Abkühlungsgeschwindigkeit ist zum Zeitpunkt  $t = 0$  maximal.

Begründung:

Für alle  $t \geq 0$  gilt  $T'(t) < 0$  und daher für den Betrag:  $|T'(t)| = -T'(t)$ .

Da die [differenzierbare] Funktion  $T'$  im [abgeschlossenen] Intervall  $[0;120]$  [wegen  $T''(t) = 0,008 \cdot e^{-0,01t} > 0$  für alle  $t \geq 0$ ] streng monoton steigt, nimmt sie ihr Minimum am linken Rand dieses Intervalls, ihr Betrag dort sein Maximum  $|T'(0)| = 0,8$  [°C/s] an.

- (3) Der Flächeninhalt des zwischen dem Graphen von  $T$  und der  $t$ -Achse eingeschlossenen

$$\text{Flächenstücks ist } A = \left| \int_0^{120} T'(t) dt \right| = \left| [T(t)]_0^{120} \right| \approx |44,1 - 100| = 55,9 \text{ [}^\circ\text{C]}.$$

Dieser Flächeninhalt gibt den Betrag der Temperaturabnahme des Körpers im Zeitintervall  $[0;120]$  an.

- (4) Die mittlere Abkühlungsgeschwindigkeit des Körpers im Zeitintervall  $[0;120]$  ist

$$\frac{T(120) - T(0)}{120 - 0} = \frac{20 + 80 \cdot e^{-1,2} - 100}{120} \approx -0,466 \text{ [}^\circ\text{C/s]}.$$

**Modelllösung d)**

(1) Die **mittlere Änderungsrate** der Abkühlungsgeschwindigkeit im Zeitintervall  $[0;120]$

$$\text{beträgt } \frac{T'(120) - T'(0)}{120 - 0} = \frac{-0,01 \cdot 80 \cdot e^{-1,2} + 0,01 \cdot 80 \cdot e^0}{120} \approx 0,00466 \text{ [}^\circ\text{C/s}^2\text{]}.$$

(2) Die **momentane Änderungsrate** der Abkühlungsgeschwindigkeit ist die Ableitung

$$T'' \text{ der Funktion } T' \text{ mit der Gleichung } T''(t) = 0,008 \cdot e^{-0,01 \cdot t}, t \geq 0.$$

Der gesuchte Zeitpunkt  $t$  ergibt sich aus dem Ansatz  $T''(t) = 0,00466$ :

$$\begin{aligned} 0,008 \cdot e^{-0,01 \cdot t} &= 0,00466 \Leftrightarrow e^{-0,01 \cdot t} = 0,5825 \\ &\Leftrightarrow -0,01 \cdot t = \ln 0,5825 \\ &\Leftrightarrow t \approx 54,04 \end{aligned}$$

Nach ungefähr 54 s ist die momentane Änderungsrate der Abkühlungsgeschwindigkeit des Körpers genau so groß wie die mittlere Änderungsrate innerhalb der ersten 120 Sekunden des Abkühlungsvorgangs.

**6.2 Teilleistungen – Kriterien****Teilaufgabe a)**

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB) <sup>1</sup>
	Der Prüfling	
1	(1) beschreibt den Verlauf des Funktionsgraphen von $T$ im Sachzusammenhang.	4 (I)
2	(2) berechnet die Temperatur des Körpers nach 120 s.	3 (I)
3	(3) prüft die Entwicklung der Temperatur des Körpers für große $t$ .	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

<sup>1</sup> AFB = Anforderungsbereich

**Teilaufgabe b)**

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	(1) weist nach, dass die mittlere Temperatur des Körpers im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ durch den angegebenen Term berechnet werden kann.	6 (II)
2	(2) berechnet die mittlere Temperatur des Körpers innerhalb der ersten 120 Sekunden des Abkühlungsvorgangs.	4 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

**Teilaufgabe c)**

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	(1) begründet qualitativ die Eigenschaften des Funktionsgraphen von $T$ in <i>Abbildung 1</i> mit den Eigenschaften des in <i>Abbildung 2</i> dargestellten Graphen der Funktion $T'$ .	4 (II)
2	(2) gibt an, zu welchem Zeitpunkt des Zeitintervalls $[0; 120]$ der Betrag der Abkühlungsgeschwindigkeit maximal ist.	2 (I)
3	(2) begründet, zu welchem Zeitpunkt der Betrag der Abkühlungsgeschwindigkeit maximal ist.	3 (III)
4	(3) berechnet den Flächeninhalt des zwischen dem Graphen von $T'$ und der $t$ -Achse eingeschlossenen Flächenstücks.	3 (I)
5	(3) interpretiert die Bedeutung des Flächeninhalts im Sachzusammenhang.	2 (III)
6	(4) ermittelt die mittlere Abkühlungsgeschwindigkeit des Körpers während der ersten 120 Sekunden des Abkühlungsvorgangs.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

**Teilaufgabe d)**

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	(1) bestimmt die mittlere Änderungsrate der Abkühlungsgeschwindigkeit während der ersten 120 Sekunden des Abkühlungsvorgangs.	5 (II)
2	(2) ermittelt den gesuchten Zeitpunkt.	7 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

**7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit**

Name des Prüflings: \_\_\_\_\_ Kursbezeichnung: \_\_\_\_\_

Schule: \_\_\_\_\_

**Teilaufgabe a)**

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK <sup>2</sup>	ZK	DK
1	(1) beschreibt den Verlauf ...	4 (I)			
2	(2) berechnet die Temperatur ...	3 (I)			
3	(3) prüft die Entwicklung ...	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (10) ..... .....					
<b>Summe Teilaufgabe a)</b>		<b>10</b>			

**Teilaufgabe b)**

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	(1) weist nach, dass ...	6 (II)			
2	(2) berechnet die mittlere ...	4 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (10) ..... .....					
<b>Summe Teilaufgabe b)</b>		<b>10</b>			

<sup>2</sup> EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

**Teilaufgabe c)**

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	(1) begründet qualitativ die ...	4 (II)			
2	(2) gibt an, zu ...	2 (I)			
3	(2) begründet, zu welchem ...	3 (III)			
4	(3) berechnet den Flächeninhalt ...	3 (I)			
5	(3) interpretiert die Bedeutung ...	2 (III)			
6	(4) ermittelt die mittlere ...	4 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (18) ..... .....					
<b>Summe Teilaufgabe c)</b>		<b>18</b>			

**Teilaufgabe d)**

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	(1) bestimmt die mittlere ...	5 (II)			
2	(2) ermittelt den gesuchten ...	7 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (12) ..... .....					
<b>Summe Teilaufgabe d)</b>		<b>12</b>			

<b>Summe insgesamt</b>		<b>50</b>			
------------------------	--	-----------	--	--	--

**Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.**