Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Grundkurs

1. Aufgabenart

Analysis

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2009

1. *Inhaltliche Schwerpunkte*
   - Untersuchung von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich notwendiger Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) in Sachzusammenhängen
   - Untersuchungen von Wirkungen (Änderungsrate)
   - Flächenberechnung durch Integration

2. *Medien/Materialien*
   - entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Muttersprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Muttersprache nicht Deutsch ist

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modelllösungen

Modelllösung a)

$h(0) = 0,2 \cdot e^{0,1 \cdot 0 - 0,9} \approx 0,081$

Der Strauch hat beim Auspflanzen eine Höhe von 8,1 cm.

Anhand der Graphik kann man ablesen, dass $h(18) \approx 0,5$.

$0,2 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,9} = 0,5 \quad \Rightarrow \quad t = 10 \cdot \ln(2,5) + 9 \approx 18,2$

Modelllösung b)

Der gesuchte Zeitpunkt entspricht einer Wendestelle des Graphen, nämlich einer Stelle mit der größten Steigung. Da jedoch für eine Exponentialfunktion wie der vorliegenden die Steigung mit wachsendem *t* ebenfalls stetig zunimmt, existiert in diesem Fall keine Wendestelle. Demnach erreicht für $t = 20$ der Graph die größte Steigung und somit der Strauch die größte Wachstumsgeschwindigkeit. Da die Ableitung der Funktion der Pflanzenhöhe der Wachstumsgeschwindigkeit entspricht, muss also berechnet werden:

$h'(t) = 0,02 \cdot e^{0,1 \cdot t - 0,9}$

$h'(20) = 0,02 \cdot e^{0,1 \cdot 20 - 0,9} \approx 0,060$.

Der Strauch wächst also am zwanzigsten Tag mit einer Geschwindigkeit von 6 cm pro Tag. Da die Werte einer Exponentialfunktion beliebig groß werden, wenn der Exponent gegen unendlich strebt, würde der Strauch dementsprechend unendlich groß. Insofern kann die Funktion nur für einen begrenzten Zeitraum als Modell bzw. zur Modellierung dienen.

Modelllösung c)

Die Höhe des Strauches ist gegeben durch

$h(20) = 0,2 \cdot e^{0,1 \cdot 20 - 0,9} \approx 0,601$.

Ab dem einundzwanzigsten Tag muss die hinzugewonnene Höhe durch Integration der Funktion *z* berechnet werden:

$$\int_{20}^{30} 0,02 \cdot e^{-0,1 \cdot t + 3,1} \mathrm{d}t = \left[-10 \cdot 0,02 \cdot e^{-0,1 \cdot t + 3,1} \right]_{20}^{30} \approx 0,380.$$

Modelllösung d)

Die Höhe des Strauches kann berechnet werden, indem zu der Höhe nach 20 Tagen ein durch Integration der Funktion *z* mit variabler oberer Grenze ermittelter Term addiert wird:

$$h_2(t) \approx 0{,}601 + \int_{20}^{t} 0{,}02 \cdot e^{-0{,}1 \cdot u + 3{,}1} \mathrm{d}u = 0{,}601 + \left[-0{,}2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot u + 3{,}1}\right]_{20}^{t} \approx 1{,}202 - 0{,}2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t + 3{,}1}$$

Da der Teilterm im Exponenten des Funktionsterms mit steigendem *t* gegen minus Unendlich strebt, wird der Strauch nicht höher als ca. 1,20 Meter. Als vollwertig werden Lösungen akzeptiert, die statt einer Grenzwertbetrachtung eine Untersuchung mit sehr großen *t*-Werten („Einsatz von großen Zahlen für *t*") und einer entsprechenden Interpretation beinhalten.

Modelllösung e)

Zunächst muss eine neue (differenzierbare) Funktion $d = h - f$ definiert werden, die die Differenz zwischen den beiden Funktionen angibt. Von dieser müssen dann durch Bestimmung der Nullstellen der ersten Ableitung mögliche lokale Extremstellen im Intervall [0;20] berechnet werden. Durch Vergleich der Beträge der Funktionswerte an diesen Stellen mit den Beträgen der Randwerte $|d(0)|$ und $|d(20)|$ findet man die gesuchte größte Differenz.

Alternative Lösungswege sind denkbar.

6.2 Teilleistungen – Kriterien

Teilaufgabe a)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	berechnet den Funktionswert an der Stelle 0.	2 (I)
2	interpretiert das Ergebnis.	3 (II)
3	gibt den Zeitpunkt $t = 18$ an.	3 (I)
4	berechnet den Zeitpunkt $t = 18{,}2$.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	berechnet die erste Ableitung.	3 (I)
2	begründet, warum keine Wendestelle existiert.	3 (II)
3	berechnet die Wachstumsgeschwindigkeit an der Stelle 20.	2 (I)
4	begründet anhand der Eigenschaften der Exponentialfunktion.	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	berechnet den Funktionswert an der Stelle 20.	2 (I)
2	bestimmt eine Stammfunktion.	3 (II)
3	berechnet das bestimmte Integral.	5 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	ermittelt einen Term für die Höhe des Strauches zum Zeitpunkt t.	5 (III)
2	begründet anhand der Eigenschaften der Exponentialfunktion.	3 (II)
3	gibt die maximale Höhe des Strauches an.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	beschreibt ein Verfahren zur Berechnung der größten Differenz zwischen f und h im Intervall [0;20].	7 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings:_____________________________________ Kursbezeichnung:____________

Schule: ____

Teilaufgabe a)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**[1]	**ZK**	**DK**
1	berechnet den Funktionswert …	2 (I)			
2	interpretiert das Ergebnis.	3 (II)			
3	gibt den Zeitpunkt …	3 (I)			
4	berechnet den Zeitpunkt …	4 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (12) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe a)	**12**			

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	**Lösungsqualität**			
	Der Prüfling	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet die erste …	3 (I)			
2	begründet, warum keine …	3 (II)			
3	berechnet die Wachstumsgeschwindigkeit …	2 (I)			
4	begründet anhand der …	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (11) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe b)	**11**			

[1] EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	berechnet den Funktionswert …	2 (I)			
2	bestimmt eine Stammfunktion.	3 (II)			
3	berechnet das bestimmte …	5 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (10) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe c)	**10**			

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	ermittelt einen Term …	5 (III)			
2	begründet anhand der …	3 (II)			
3	gibt die maximale …	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (10) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe d)	**10**			

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	Lösungsqualität			
	Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	**EK**	**ZK**	**DK**
1	beschreibt ein Verfahren …	7 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (7) ………………………………………………………………… …………………………………………………………………					
	Summe Teilaufgabe e)	**7**			

	Summe insgesamt	**50**			

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus der Aufgabengruppe 2.