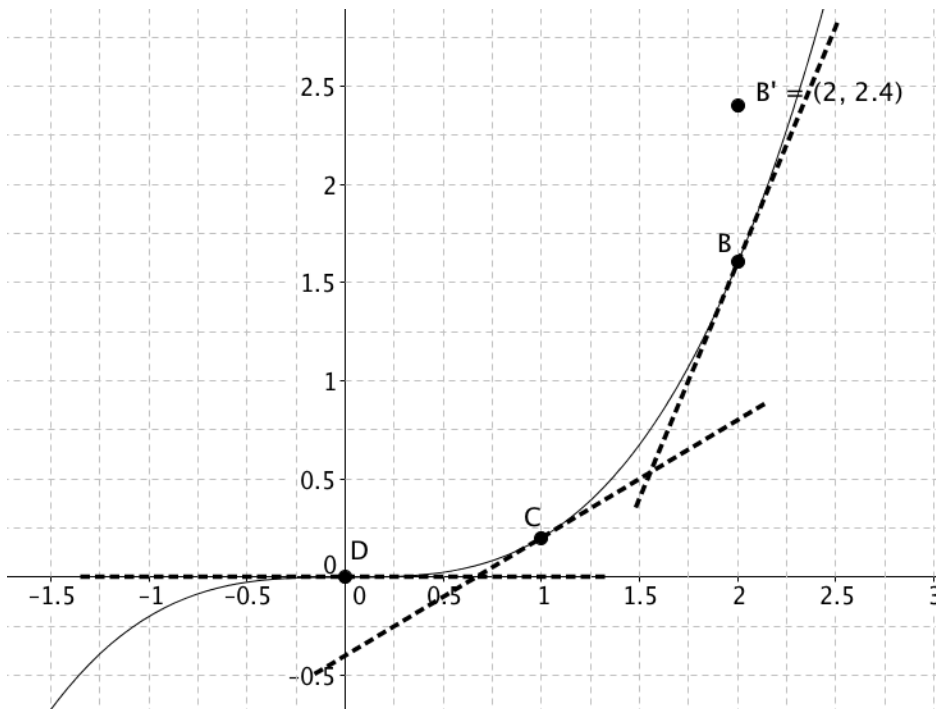
Die Ableitung von Parabeln vom Grad 3, 4, 5, …

Der praktische Nutzen von Parabeln n-ten Grades (oder auch Potenzfunktionen der Art $f(x) = x^n$) ist spätestens für $n \geq 4$ nicht mehr einzusehen. Aus dem Blickwinkel „Wozu brauche ich das im Leben?“ lässt sich eine Untersuchung dieser Funktionen auf den ersten Blick nicht gut rechtfertigen. Die Untersuchung dieser Funktionen ist jedoch ein gutes Beispiel dafür, was naturwissenschaftliches Arbeiten und Forschen in der Mathematik ausmacht: Man arbeitet an einem Phänomen und fragt sich, ob man eine Regelmäßigkeit für weiterführende und allgemeine Fälle formulieren kann.
Der Satz des Pythagoras ist dafür ein gutes Beispiel. Mit dem Satz des Pythagoras verbinden wir eine Gleichung der Form $a^2 + b^2 = c^2$, für die man Lösungen finden kann (z.B. 3, 4 und 5), die man anschaulich als Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks deuten und nutzen kann. Der nächste Schritt im Sinne einer mathematisch weiterführenden Untersuchung wäre die Frage, ob es auch zur Gleichung $a^3 + b^3 = c^3$ Lösungen gibt (z.B. ganzzahlige, wie im obigen Fall) und ob man sie veranschaulichen kann. Im nächsten Schritt untersucht man, ob es ganzzahlige Lösungen zu $a^4 + b^4 = c^4$ gibt, und so weiter, bis man eine zufriedenstellende Antwort auf die Frage geben kann, ob es ganzzahlige Lösungen zu $a^n + b^n = c^n$ gibt.
Eine solche Untersuchung soll jetzt am Beispiel der Tangentengleichungen stattfinden. Dafür untersuchen wir der Reihe nach jetzt Parabeln vom Grad 3, dann vom Grad 4 usw., wir vergleichen die Ergebnisse miteinander und versuchen, eine allgemeingültige Lösung oder Antwort zu finden.

Das Bild unten zeigt die Funktionsgleichung der Parabel $f(x) = 0{,}1 \cdot x^3$ und Tangenten an die Parabel in den Punkten B, C und D.
Bei $x = 2$ ist zusätzlich der Punkt B’ eingetragen, dessen y-Koordinate die Steigung der Tangenten an der Stelle $x = 2$ ist.



a) Berechne die Steigung m der Tangenten an die Funktion f(x) an den Stellen x = 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, ... -5. Teilt euch die Arbeit auf!
b) Trage die Zahlenpaare
(x / Steigung der Tangenten an der Stelle x)
aus a) wie beim Punkt B’ als Punkte ins Koordinatensystem ein.
c) Bestimme mit Hilfe von b) die eine möglichst einfache Funktionsgleichung für die **Ableitung von f**.
d) Berechne zu $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = 2 \cdot x^3$, $f_3(x) = 3 \cdot x^3$, ... jeweils eine möglichst einfache Funktionsgleichung für die **Ableitung von f**.
e) Wie lauten die **Ableitungsfunktion** zu den Funktionsgleichungen
$f_1(x) = x^4$, $f_2(x) = 2 \cdot x^4$, $f_3(x) = 3 \cdot x^4$, ...
$f_1(x) = x^5$, $f_2(x) = 2 \cdot x^5$, $f_3(x) = 3 \cdot x^5$, ...
f) Geht das noch allgemeiner? Vermute!