

## Verzinsung einmal anders

Angenommen, man sucht eine Funktion, mit der man die Wertentwicklung seines Kapitals in Abhängigkeit von der Anlagezeit berechnen kann. Legt man z.B. ein Kapital  $K$  mit  $K=1000\text{€}$  zu einem Zinssatz von 4% p.a. an, dann kann man die Entwicklung von  $K$  in Abhängigkeit der Zeit  $n$  (in Jahren) mit der Funktion  $K(n) = 1000 \cdot 1,04^n$  berechnen.

### Diese Funktion kann man aber auch auf folgende Art bestimmen:

1. Begründe, warum für jeden Zeitpunkt  $n$  gilt

$$K(n+1) = K(n) + K(n) \cdot 0,04$$

2. Begründe, warum demnach gilt

$$K\left(n + \frac{1}{2}\right) \approx K(n) + K(n) \cdot 0,04 \cdot \frac{1}{2}$$

$$K\left(n + \frac{1}{3}\right) \approx K(n) + K(n) \cdot 0,04 \cdot \frac{1}{3}$$

...

$$K(n+h) \approx K(n) + K(n) \cdot 0,04 \cdot h$$

Für „ $a$ “ ist also ein Faktor  $a$  zu bestimmen, für den gilt

$$K(n+h) = K(n) + K(n) \cdot a \cdot h$$

Umgeformt gilt

$$K(n+h) = K(n) + K(n) \cdot a \cdot h$$

$$\Leftrightarrow \frac{K(n+h) - K(n)}{h} = K(n) \cdot a$$

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} K'(n) = K(n) \cdot a$$

Gesucht ist also eine Funktion  $K(n)$ , für die gilt  $K'(n) = K(n) \cdot a$

3. Welche Funktionen erfüllen diese Bedingung?

Da zum Zeitpunkt 0 der Anlagebetrag 1000€ entspricht, muss  $K(0)=1000$  gelten.

Da zum Zeitpunkt 1 das Kapital 1040€ betragen muss, muss  $K(1)=1040$  gelten.

4. Wie muss man die Funktion aus 3. verändern, damit sie diesen Bedingungen genügt?

5. Ein ähnliches Problem:

Aus der täglichen Erfahrung heraus kühlt Kaffee in einer Kaffeetasse zunächst schnell (man muss nicht lange warten, bis man ihn trinken kann) und mit zunehmender Zeit immer langsamer ab. Die Abkühlung von Kaffee verhält sich also auf den ersten Blick ähnlich wie die Verzinsung: Viel Kapital führt zu vielen Zinsen, wenig Kapital führt zu wenig Zinsen. Der einzige Unterschied ist, dass das Kapital zu-, die Temperatur  $T$  des Kaffees jedoch mit der Zeit  $t$  abnimmt. Angenommen, Kaffee hat direkt nach dem Brühen eine Temperatur von  $80^\circ\text{C}$  und nach zwei Minuten eine Temperatur von  $60^\circ$ . Mit welcher Funktion könnte man die Temperatur des Kaffees in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  in Minuten berechnen?