

Unterlagen für die Lehrkraft

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Leistungskurs

1. Aufgabenart

Stochastik

2. Aufgabenstellung

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Vorgaben 2009

1. Inhaltliche Schwerpunkte

- Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit
- Binomialverteilung einschließlich Erwartungswert und Standardabweichung

2. Medien/Materialien

- entfällt

5. Zugelassene Hilfsmittel

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung
- Muttersprachliches Wörterbuch für Studierende, deren Muttersprache nicht Deutsch ist

6. Vorgaben für die Bewertung der Schülerleistungen

6.1 Modellösungen

Modellösung a)

(1) Die Zufallsvariable X_1 zählt die Anzahl der Spender mit der Blutgruppe A Rh– unter 90 Spendern. X_1 ist $B_{90; 0,06}$ -verteilt:

$$P(X_1 \leq 2) = 0,94^{90} + 90 \cdot 0,94^{89} \cdot 0,06 + 4005 \cdot 0,94^{88} \cdot 0,06^2 \approx 0,088 .$$

(2) Die Zufallsvariable X_2 zählt die Anzahl der Spender mit der Blutgruppe AB unter 100 Spendern. X_2 ist $B_{100; 0,05}$ -verteilt:

$$P(5 \leq X_2) = 1 - P(X_2 \leq 4) \approx 0,564.$$

Modellösung b)

Die Zufallsvariable X zählt die Anzahl der Spender mit der Blutgruppe AB Rh–.

X ist binomialverteilt mit $p = 0,01$. Zu bestimmen ist n aus

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) > 0,99$$

$$\Leftrightarrow P(X = 0) < 0,01 \Leftrightarrow 0,99^n < 0,01 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 0,01}{\ln 0,99} \approx 458,21.$$

Man benötigt mindestens 459 Spender, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens einen Spender mit der Blutgruppe AB Rh– zu erhalten.

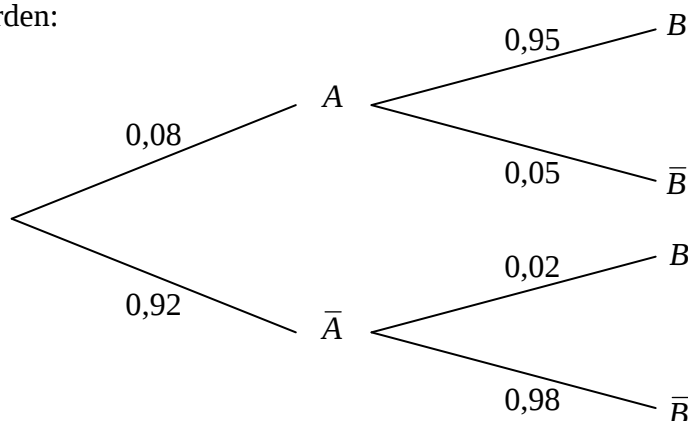
Modellösung c)

Betrachtet werden die Ereignisse:

A: Ein Spender hat Diabetes.

B: Ein Spender wird als Diabetiker eingestuft.

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse E_1 und E_2 kann ein Baumdiagramm erstellt werden:



Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_1 , dass ein Spender nicht als Diabetiker eingestuft wird, ist:

$$P(E_1) = P(\bar{B}) = 0,08 \cdot 0,05 + 0,92 \cdot 0,98 = 0,9056 \approx 91 \% .$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_2 , dass ein als Diabetiker eingestufte Spender nicht an Diabetes erkrankt, ist:

$$P(E_2) = P_B(\bar{A}) = \frac{0,92 \cdot 0,02}{0,0944} = 0,1949 \approx 19 \% .$$

Modelllösung d)

- (1) Bei einer Gruppengröße von k Personen sind entweder 1 (kein Befund) oder $k + 1$ Tests pro Gruppe erforderlich. Bezeichnet $q = 0,9993$ die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person gesund ist, so ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X :

x	1	$k + 1$
$P(X = x)$	q^k	$1 - q^k$

- (2) Die durchschnittliche Anzahl der erforderlichen Tests ist

$$E(X) = 1 \cdot q^k + (k + 1) \cdot (1 - q^k) = k + 1 - k \cdot q^k.$$

Die Ersparnis beträgt pro Person

$$G(k) := \frac{k - E(X)}{k} = \frac{k \cdot q^k - 1}{k} = q^k - 1/k = 0,9993^k - 1/k.$$

- (3) Bei einer Gruppengröße von 40 Personen beträgt die Ersparnis gegenüber der Einzelprüfung

$$G(40) \approx 0,9474.$$

Modelllösung e)

Die Zufallsgröße X bezeichne hier die Anzahl der Personen mit Blutgruppe B in der Stichprobe. X ist $B_{n,p}$ -verteilt mit unbekanntem n und p .

Zu bestimmen ist der Umfang n der Stichprobe, so dass $P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \leq 0,05\right) \geq 0,90$

$$\Leftrightarrow P(np - 0,05n \leq X \leq np + 0,05n) \geq 0,90.$$

Nach der σ -Tabelle ist das der Fall, wenn

$$0,05n \geq 1,64 \sigma$$

$$\Leftrightarrow 1,64 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq 0,05.$$

Für $0,1 \leq p \leq 0,2$ ist die durch $f(p) := p(1-p)$ definierte Funktion streng wachsend.

Die Bedingung ist somit erfüllt, wenn

$$1,64 \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{n}} \leq 0,05$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow n \geq 172,13.$$

Die Stichprobe muss also mindestens 173 Personen umfassen.

6.2 Teilleistungen – Kriterien**Teilaufgabe a)**

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB) ¹
	Der Prüfling	
1	(1) berechnet $P(X_1 \leq 2)$.	5 (I)
2	(2) berechnet $P(5 \leq X_2)$.	3 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe b)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	bestimmt einen geeigneten Lösungsansatz zur Berechnung von n .	4 (II)
2	berechnet die Anzahl der Spender.	3 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

¹ AFB = Anforderungsbereich

Teilaufgabe c)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	bestimmt die totale Wahrscheinlichkeit $P(E_1)$.	5 (II)
2	bestimmt die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(E_2)$.	4 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe d)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	(1) bestimmt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X .	4 (III)
2	(2) berechnet den Erwartungswert $E(X)$.	3 (I)
3	ermittelt die durchschnittliche Ersparnis pro Person abhängig von k .	4 (II)
4	(3) bestimmt die Ersparnis bei $k = 40$.	2 (I)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

Teilaufgabe e)

	Anforderungen	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
	Der Prüfling	
1	ermittelt einen geeigneten Lösungsansatz zur Bestimmung von n .	5 (II)
2	schätzt p geeignet ab.	5 (II)
3	berechnet n .	3 (II)
Der gewählte Lösungsansatz und -weg muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden an dieser Stelle mit entsprechender Punktzahl bewertet.		

7. Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: _____ Kursbezeichnung: _____

Schule: _____

Teilaufgabe a)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK ²	ZK	DK
1	(1) berechnet $P(X_1 \leq 2)$.	5 (I)			
2	(2) berechnet $P(5 \leq X_2)$.	3 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (8)					
Summe Teilaufgabe a)		8			

Teilaufgabe b)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	bestimmt einen geeigneten ...	4 (II)			
2	berechnet die Anzahl ...	3 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (7)					
Summe Teilaufgabe b)		7			

Teilaufgabe c)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	bestimmt die totale ...	5 (II)			
2	bestimmt die bedingte ...	4 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (9)					
Summe Teilaufgabe c)		9			

² EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Teilaufgabe d)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	(1) bestimmt die Wahrscheinlichkeitsverteilung ...	4 (III)			
2	(2) berechnet den Erwartungswert ...	3 (I)			
3	ermittelt die durchschnittliche ...	4 (II)			
4	(3) bestimmt die Ersparnis ...	2 (I)			
sachlich richtige Alternativen: (13)					
Summe Teilaufgabe d)		13			

Teilaufgabe e)

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl (AFB)	EK	ZK	DK
1	ermittelt einen geeigneten ...	5 (II)			
2	schätzt p geeignet ab.	5 (II)			
3	berechnet n .	3 (II)			
sachlich richtige Alternativen: (13)					
Summe Teilaufgabe e)		13			

Summe insgesamt		50			
------------------------	--	-----------	--	--	--

Festlegung der Gesamtnote (Bitte nur bei der letzten bearbeiteten Aufgabe ausfüllen.)

	Lösungsqualität			
	maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
Übertrag der Punktzahl aus der ersten bearbeiteten Aufgabe	50			
Übertrag der Punktzahl aus der zweiten bearbeiteten Aufgabe	50			
Übertrag der Punktzahl aus der dritten bearbeiteten Aufgabe	50			
Punktzahl der gesamten Prüfungsleistung	150			
aus der Punktzahl resultierende Note				
Note ggf. unter Absenkung um ein bis zwei Notenpunkte gemäß § 17 Abs. 5 APO-WbK				
Paraphe				

ggf. arithmetisches Mittel der Punktzahlen aus EK und ZK: _____

ggf. arithmetisches Mittel der Notenurteile aus EK und ZK: _____

Die Klausur wird abschließend mit der Note: _____ (____ Punkte) bewertet.

Unterschrift, Datum

Grundsätze für die Bewertung (Notenfindung)

Für die Zuordnung der Notenstufen zu den Punktzahlen ist folgende Tabelle zu verwenden:

Note	Punkte	Erreichte Punktzahl
sehr gut plus	15	150 – 143
sehr gut	14	142 – 135
sehr gut minus	13	134 – 128
gut plus	12	127 – 120
gut	11	119 – 113
gut minus	10	112 – 105
befriedigend plus	9	104 – 98
befriedigend	8	97 – 90
befriedigend minus	7	89 – 83
ausreichend plus	6	82 – 75
ausreichend	5	74 – 68
ausreichend minus	4	67 – 58
mangelhaft plus	3	57 – 49
mangelhaft	2	48 – 40
mangelhaft minus	1	39 – 30
ungenügend	0	29 – 0