



Name: _____

Abiturprüfung 2009

Mathematik, Leistungskurs

Aufgabenstellung

Die folgende Tabelle zeigt die Häufigkeit der Blutgruppen in Deutschland in Prozent.

Blutgruppe	A	0	B	AB
Rh+	37	35	9	4
Rh-	6	6	2	1

Quelle: Wikipedia.org/wiki/Blutgruppen

Die Universitätsklinik einer deutschen Großstadt ruft zur Blutspende auf.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

(1) von 90 Spendern höchstens zwei die Blutgruppe A Rh- besitzen,

(2) von 100 Spendern mindestens 5 die Blutgruppe AB besitzen.

(8 Punkte)

b) Ermitteln Sie die Anzahl der Spender, die benötigt werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 % mindestens einmal die seltene Blutgruppe AB Rh- zu erhalten.

(7 Punkte)



Name: _____

c) Vor der Einlagerung müssen die Blutkonserven im sog. PCR-Verfahren auf HIV-Erreger untersucht werden. Da dieser Test sehr kostspielig ist, werden die Spender in Gruppen von je k Personen eingeteilt. Dann wird zunächst jeweils ein Gemisch aus dem Blut der Personen einer Gruppe hergestellt; anschließend werden diese Gemische untersucht. Nur bei denjenigen Gruppen, bei denen Erreger der Infektionskrankheit gefunden werden, wird anschließend das Blut jeder Einzelperson getestet.

Der Anteil HIV-infizierter Personen unter den Blutspendern beträgt in der Bundesrepublik 0,07 %.

Die Zufallsgröße X bezeichne die Anzahl der erforderlichen Untersuchungen, die bei einer Gruppe von k Personen durchgeführt werden müssen.

(1) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X .*

(2) *Ermitteln Sie, wie viele Untersuchungen sich in Abhängigkeit von der Gruppengröße k erwartungsgemäß pro Person durch den Gruppentest gegenüber der Einzeluntersuchung einsparen lassen.*

[Zur Kontrolle: Die Ersparnis beträgt $G(k) = 0,9993^k - 1/k$.]

(3) *Berechnen Sie die mögliche Ersparnis pro Person bei einer Gruppengröße von 40 Personen gegenüber der Einzeluntersuchung.* (14 Punkte)

d) Es ist bekannt, dass in Europa der Anteil der Personen mit Blutgruppe B zwischen 10 % und 20 % schwankt. In einer bestimmten europäischen Region soll der Bevölkerungsanteil mit der Blutgruppe B bestimmt werden.

Ermitteln Sie den Umfang, den die Stichprobe haben muss, damit der Anteil an Personen mit Blutgruppe B in der Stichprobe mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % um höchstens 0,05 vom tatsächlichen Anteil der Grundgesamtheit abweicht. (11 Punkte)

e) Bei einer Untersuchung an einer europäischen Klinik wurde unter 200 Personen bei 17 die Blutgruppe B festgestellt.

Untersuchen Sie, für welche Werte des tatsächlichen (unbekannten) Anteils p von Personen mit der Blutgruppe B das Ergebnis der Untersuchung um höchstens $2 \cdot \sigma_x$ vom Erwartungswert μ_x abweicht. (10 Punkte)



Name: _____

Zugelassene Hilfsmittel:

- Wissenschaftlicher Taschenrechner (ohne oder mit Grafikfähigkeit)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Tabelle 1: σ -Regeln für Binomialverteilungen

Eine mit den Parametern n und p binomialverteilte Zufallsgröße X hat den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ und die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$.

Wenn die LAPLACE-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist, gelten die σ -Regeln:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,683$	$P(\mu - 1,64\sigma < X < \mu + 1,64\sigma) \approx 0,90$
$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,954$	$P(\mu - 1,96\sigma < X < \mu + 1,96\sigma) \approx 0,95$
$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,997$	$P(\mu - 2,58\sigma < X < \mu + 2,58\sigma) \approx 0,99$



Name: _____

Tabelle 2: Kumulierte Binomialverteilung für $n = 10$ und $n = 20$

$$F(n; p; k) = B(n; p; 0) + \dots + B(n; p; k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \dots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

		p										
n	k	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,5		n		
10	0	0,8171	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0010	9	10		
	1	0,9838	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,0107	8			
	2	0,9991	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,0547	7			
	3		0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,1719	6			
	4		0,9999	0,9984	0,9672	0,9219	0,8497	0,3770	5			
	5			0,9999	0,9936	0,9803	0,9527	0,6230	4			
	6				0,9991	0,9965	0,9894	0,8281	3			
	7				0,9999	0,9996	0,9984	0,9453	2			
	8		Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000						0,9999		0,9893	1
	9							0,9990	0			
20	0	0,6676	0,3585	0,1216	0,0115	0,0032	0,0008	0,0000	19	20		
	1	0,9401	0,7358	0,3917	0,0692	0,0243	0,0076	0,0000	18			
	2	0,9929	0,9245	0,6769	0,2061	0,0913	0,0355	0,0002	17			
	3	0,9994	0,9841	0,8670	0,4114	0,2252	0,1071	0,0013	16			
	4		0,9974	0,9568	0,6296	0,4148	0,2375	0,0059	15			
	5		0,9997	0,9887	0,8042	0,6172	0,4164	0,0207	14			
	6			0,9976	0,9133	0,7858	0,6080	0,0577	13			
	7			0,9996	0,9679	0,8982	0,7723	0,1316	12			
	8			0,9999	0,9900	0,9591	0,8867	0,2517	11			
	9				0,9974	0,9861	0,9520	0,4119	10			
	10				0,9994	0,9961	0,9829	0,5881	9			
	11				0,9999	0,9991	0,9949	0,7483	8			
	12					0,9998	0,9987	0,8684	7			
	13						0,9997	0,9423	6			
	14							0,9793	5			
	15							0,9941	4			
	16		Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000						0,9987		3	
	17							0,9998	2			
n		0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,7	0,5	k	n		

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n; p; k) = 1 -$ abgelesener Wert



Name: _____

Tabelle 3: Kumulierte Binomialverteilung für $n = 50$

$$F(n; p; k) = B(n; p; 0) + \dots + B(n; p; k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \dots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

		<u>p</u>									
<u>n</u>	<u>k</u>	0,02	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5		<u>n</u>
50	0	0,3642	0,0769	0,0052	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	49	50
	1	0,7358	0,2794	0,0338	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	48	
	2	0,9216	0,5405	0,1117	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	47	
	3	0,9822	0,7604	0,2503	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	46	
	4	0,9968	0,8964	0,4312	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	45	
	5	0,9995	0,9622	0,6161	0,0480	0,0070	0,0007	0,0000	0,0000	44	
	6	0,9999	0,9882	0,7702	0,1034	0,0194	0,0025	0,0000	0,0000	43	
	7		0,9968	0,8779	0,1904	0,0453	0,0073	0,0001	0,0000	42	
	8		0,9992	0,9421	0,3073	0,0916	0,0183	0,0002	0,0000	41	
	9		0,9998	0,9755	0,4437	0,1637	0,0402	0,0008	0,0000	40	
	10			0,9906	0,5836	0,2622	0,0789	0,0022	0,0000	39	
	11			0,9968	0,7107	0,3816	0,1390	0,0057	0,0000	38	
	12			0,9990	0,8139	0,5110	0,2229	0,0133	0,0002	37	
	13			0,9997	0,8894	0,6370	0,3279	0,0280	0,0005	36	
	14			0,9999	0,9393	0,7481	0,4468	0,0540	0,0013	35	
	15				0,9692	0,8369	0,5692	0,0955	0,0033	34	
	16				0,9856	0,9017	0,6839	0,1561	0,0077	33	
	17				0,9937	0,9449	0,7822	0,2369	0,0164	32	
	18				0,9975	0,9713	0,8594	0,3356	0,0325	31	
	19				0,9991	0,9861	0,9152	0,4465	0,0595	30	
	20				0,9997	0,9937	0,9522	0,5610	0,1013	29	
	21				0,9999	0,9974	0,9749	0,6701	0,1611	28	
	22					0,9990	0,9877	0,7660	0,2399	27	
	23					0,9996	0,9944	0,8438	0,3359	26	
	24					0,9999	0,9976	0,9022	0,4439	25	
	25						0,9991	0,9427	0,5561	24	
	26						0,9997	0,9686	0,6641	23	
	27						0,9999	0,9840	0,7601	22	
	28							0,9924	0,8389	21	
	29							0,9966	0,8987	20	
	30							0,9986	0,9405	19	
	31							0,9995	0,9675	18	
	32							0,9998	0,9836	17	
	33							0,9999	0,9923	16	
	34								0,9967	15	
	35								0,9987	14	
	36								0,9995	13	
37								0,9998	12		
<u>n</u>	<u>k</u>	0,98	0,95	0,9	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	<u>k</u>	<u>n</u>

Nicht aufgeführte Werte sind (auf 4 Dez.) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n; p; k) = 1 -$ abgelesener Wert



Name: _____

Tabelle 5: Kumulierte Binomialverteilung für $n = 200$

$$F(n; p; k) = B(n; p; 0) + \dots + B(n; p; k) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^{n-0} + \dots + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

		p					
n	k	0,02	0,05	0,1	0,2	n	n
200	0	0,0176	0,0000	0,0000	0,0000	199	200
	1	0,0894	0,0004	0,0000	0,0000	198	
	2	0,2351	0,0023	0,0000	0,0000	197	
	3	0,4315	0,0090	0,0000	0,0000	196	
	4	0,6288	0,0264	0,0000	0,0000	195	
	5	0,7867	0,0623	0,0000	0,0000	194	
	6	0,8914	0,1237	0,0001	0,0000	193	
	7	0,9507	0,2133	0,0005	0,0000	192	
	8	0,9798	0,3270	0,0014	0,0000	191	
	9	0,9925	0,4547	0,0035	0,0000	190	
	10	0,9975	0,5831	0,0081	0,0000	189	
	11	0,9992	0,6998	0,0168	0,0000	188	
	12	0,9998	0,7965	0,0320	0,0000	187	
	13	0,9999	0,8701	0,0566	0,0000	186	
	14		0,9219	0,0929	0,0000	185	
	15		0,9556	0,1431	0,0000	184	
	16		0,9762	0,2075	0,0000	183	
	17		0,9879	0,2849	0,0000	182	
	18		0,9942	0,3724	0,0000	181	
	19		0,9973	0,4655	0,0000	180	
	20		0,9988	0,5592	0,0001	179	
	21		0,9995	0,6484	0,0002	178	
	22		0,9998	0,7290	0,0005	177	
	23		0,9999	0,7983	0,0010	176	
	24			0,8551	0,0020	175	
	25			0,8995	0,0036	174	
	26			0,9328	0,0064	173	
	27			0,9566	0,0110	172	
	28			0,9729	0,0179	171	
	29			0,9837	0,0283	170	
	30			0,9905	0,0430	169	
	31			0,9946	0,0632	168	
	32			0,9971	0,0899	167	
	33			0,9985	0,1239	166	
	34			0,9992	0,1656	165	
	35			0,9996	0,2151	164	
	36			0,9998	0,2717	163	
	37			0,9999	0,3345	162	
	38				0,4019	161	
	39				0,4718	160	
	40				0,5422	159	
	41				0,6108	158	
	42				0,6758	157	
	43				0,7355	156	
	44				0,7887	155	
	45				0,8349	154	
	46				0,8738	153	
	47				0,9056	152	
	48				0,9310	151	
	49				0,9506	150	
	50				0,9655	149	
	51				0,9764	148	
	52				0,9843	147	
	53				0,9897	146	
	54				0,9934	145	
	55				0,9959	144	
	56				0,9975	143	
	57				0,9985	142	
	58				0,9991	141	
	59				0,9995	140	
	60				0,9997	139	
	61				0,9998	138	
62				0,9999	137		
		0,98	0,95	0,9	0,8		
				p			

Nicht aufgeführte Werte sind
(auf 4 Dezimalen) 1,0000

Bei grau unterlegtem Eingang, d. h. $p \geq 0,5$, gilt: $F(n; p; k) = 1 -$ abgelesener Wert



Name: _____

Tabelle 6: Normalverteilung

$$\phi(z) = 0, \dots$$

$$\phi(-z) = 1 - \phi(z)$$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998
3,5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998
3,6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,7	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999
3,8	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999

Beispiele für den Gebrauch:

$$\phi(2,32) = 0,9898$$

$$\phi(z) = 0,994 \Rightarrow z = 2,51$$

$$\phi(-0,9) = 1 - \phi(0,9) = 0,1841$$